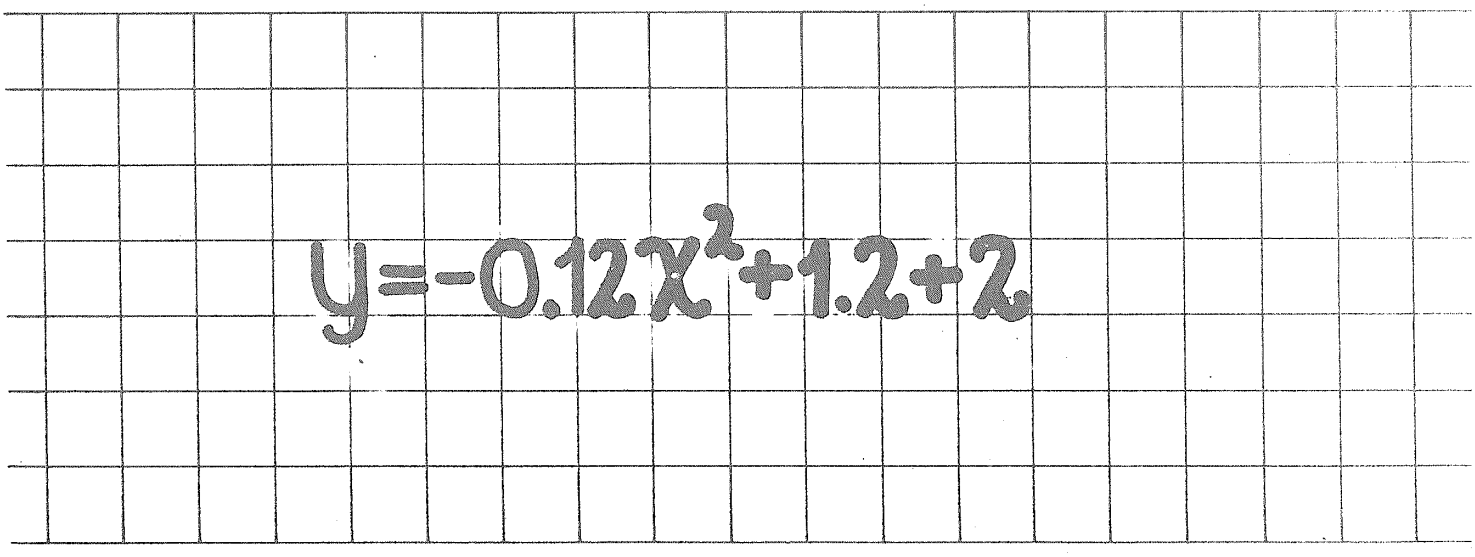
LA RELACIÓN COMO MODELO MATEMÁTICO

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. ***La relación como modelo matemático***
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 7

LA RELACIÓN COMO MODELO MATEMÁTICO

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
LA RELACIÓN COMO MODELO MATEMÁTICO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1521-7

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

7.1 La relación como modelo matemático 9

7.2 Producto cartesiano 26

7.3 Relaciones 53

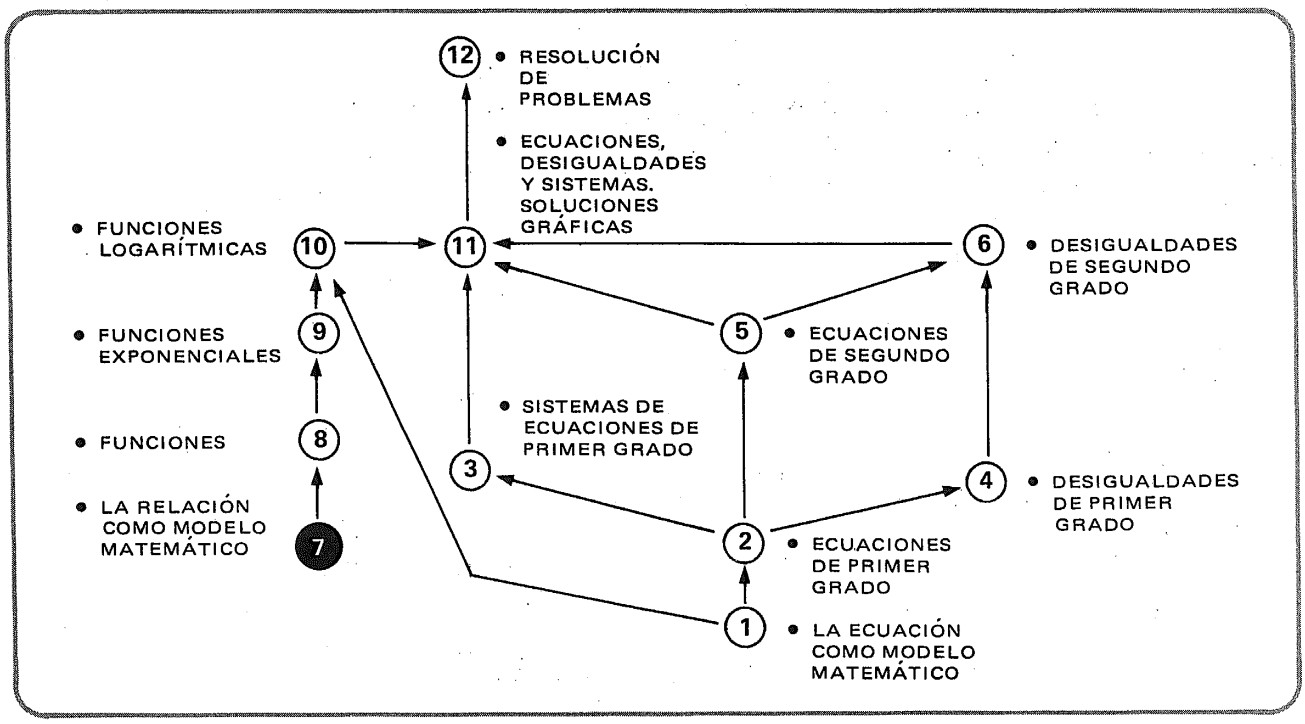
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 7. La relación como modelo matemático

Objetivos: interpretar una relación como el modelo matemático de una situación real, representarla simbólica y gráficamente, y señalar sus elementos

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1

7.1

La relación como
modelo matemático

1

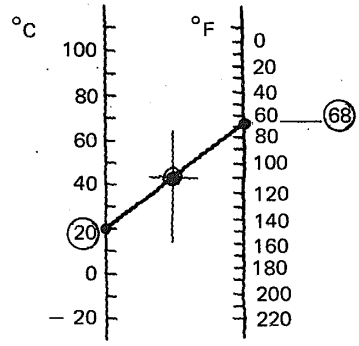
Analicemos con cuidado las situaciones siguientes.

1. Deseamos conocer

el equivalente en	de una determinada temperatura dada en
grados Fahrenheit	**grados centígrados**
(°F)	(°C)

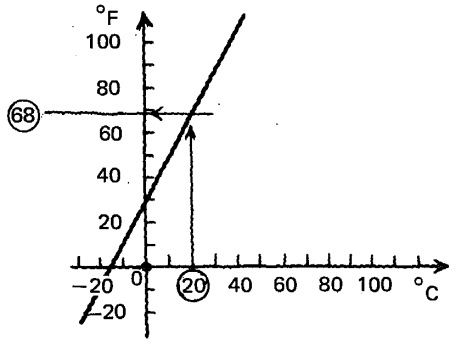
2

Para tal fin podemos utilizar un modelo gráfico como éste



3

O como éste



4

O bien,
un modelo algebraico
como éste

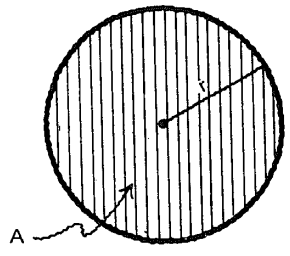
$$F = 1.8C + 32 \qquad c \in \mathbb{R}$$

en que:
C = número de grados centígrados
y
F = número de grados Fahrenheit

5

2. Para determinar,

a partir del **radio** r | el **área** A de una región circular...



6

. . .utilizamos la expresión algebraica

$$A = \pi r^2$$

$$r \in \mathbb{R} \wedge r > 0$$

siendo $\pi \doteq 3.1416$

7

3. Queremos saber,

para un hombre de talla mediana, cuya	cuál debe ser su
estatura	**peso**
en metros conocemos	promedio en kilogramos.

8

Entonces, consultamos una tabla como ésta:

Estatura (en m)	Peso (en kg)
1.570	De 53.500 a 58.500
1.595	54.900 60.300
1.620	55.300 61.700
1.645	57.600 63.000
1.670	58.900 64.800
1.695	60.800 66.700
1.720	62.600 68.900
1.745	64.400 70.800
1.770	66.200 72.600

9

4. De acuerdo con

la	podemos calcular el
distancia recorrida	**costo de un viaje en taxi**
en kilómetros,	para un recorrido máximo de 50 kilómetros. . .

10

. . . por medio de una expresión algebraica como ésta:

Importe "banderazo" en pesos
costo en pesos por km

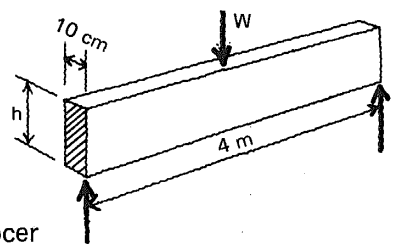
$$y = 50 + 20x$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leqslant 50$$

en que:

x = distancia recorrida en kilómetros
y = costo del viaje en pesos

11



5. Podemos conocer

para un **peralte** dado (h) comprendido entre 10 y 60 centímetros,	la **carga en kilogramos** (W) que una viga de cierto material, de 4 metros de longitud y 10 centímetros de ancho puede soportar...

12

. . . por medio de una
expresión como ésta,
determinada
experimentalmente

$$W = 10.67\ h^2$$
$$h \in \mathbb{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60$$

13

6. Es posible determinar,

para un cierto	el número de
peso	**calorías**
deseado, en kilos,	que un hombre de 25 años de edad teóricamente necesita consumir. . .

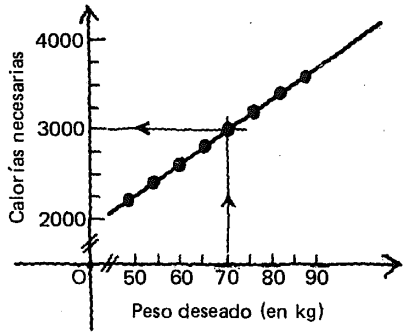
14

. . . por medio de una tabla como esta:

Peso deseado (en kg)	Calorías necesarias
49.900	2 350
54.800	2 550
59.900	2 700
64.900	2 800
69.800	3 000
74.800	3 200
79.800	3 350
84.800	3 500

5

...o por medio de una gráfica como ésta



6

7. Si conocemos

la cantidad de	podemos calcular la
corriente	**potencia**
en amperios que fluye por un cierto circuito eléctrico,	en vatios disipada en forma de calor...

17

...por medio de una expresión como ésta

$$W = 30\,A$$

$$A \in \mathbb{R} \text{ y } A \geqslant 0$$

en que:

A = corriente en amperios
W = potencia disipada en vatios

18

8. Podemos calcular

En **función** del	la
número de unidades	**utilidad**
vendidas,	obtenida...
de determinado artículo,	

19

...si sabemos que

$$U = 36.50x - 5500$$
$$x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900$$

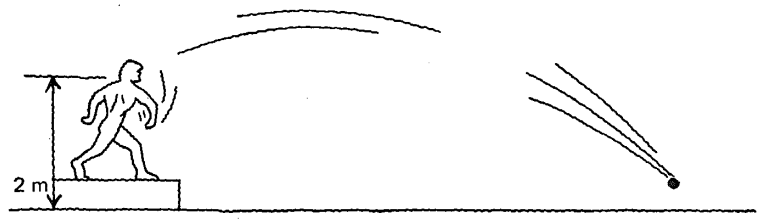
en que:

x = número de unidades vendidas
U = utilidad en pesos

Una "utilidad negativa" será interpretada como una "pérdida".

20

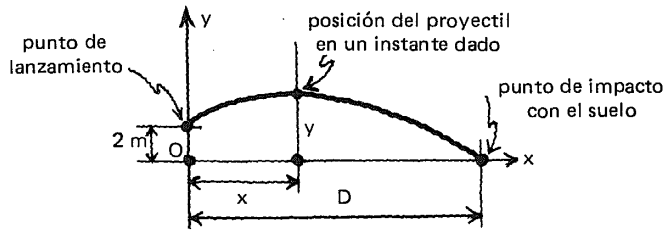
9. Consideremos un proyectil que es arrojado con la mano desde una altura de 2 metros sobre el suelo.



21

La expresión $y = -0.12x^2 + 1.2x + 2 \quad x \in \mathbb{R}\ y\ 0 \leqslant x \leqslant D$

nos permite calcular, para una determinada **distancia horizontal** x	la correspondiente **altura** y a que el proyectil se encuentra en un momento dado.



22

10. Una tarifa de enegía eléctrica para uso doméstico, que da

en **función** del **consumo,**	el **precio del kilovatio hora...**

23

...se puede presentar en la forma siguiente:

consumo en kWh	Precio del kWh
(0, 50]	6.40
(50, 100]	10.90
(100, ∞)	19.70

24

Todas las situaciones anteriores,
y muchas otras, tienen una

característica común.

25

En todas ellas
hablamos de

dos conjuntos

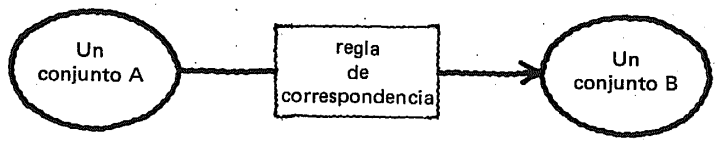
y de

una regla de correspondencia

que asigna a cada elemento de
uno de los conjuntos uno o más
elementos del otro.

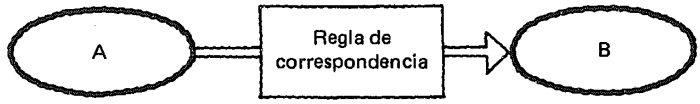
26

Si expresamos lo anterior en forma esquemática
tendremos lo siguiente:



27

Por ejemplo,
en 1 :



Los elementos de A son números reales que representan temperaturas en

grados centígrados

Los elementos de B son

[ ]

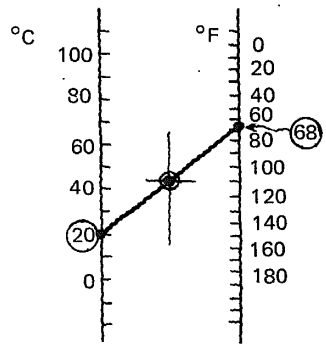
números reales que representan temperaturas en **grados Fahrenheit**

28

En este modelo gráfico la

regla de correspondencia

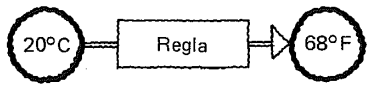
podría enunciarse así:

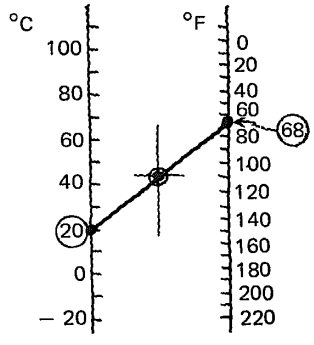


(véase cuadro siguiente)

29

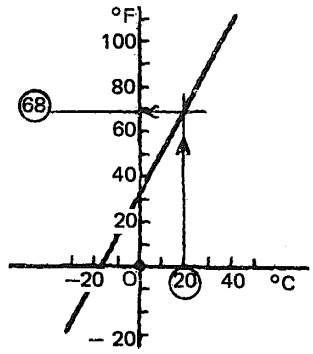
- Tómese un número en la escala °C
- Únase con una línea recta con el punto central, prolongándola hasta su intersección con la escala °F
- Léase en esta escala el número correspondiente





30

En este otro modelo gráfico
la regla podría enunciarse así:

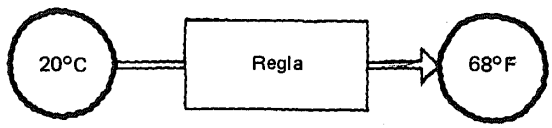


Por ejemplo:

- Tómese un punto correspondiente a una temperatura en grados centígrados en el eje °C.
- Trácese una recta paralela al eje °F hasta su intersección con la línea de trazo grueso.
- De este punto trácese otra recta paralela al eje °C hasta su intersección con el eje °F.
- Léase en éste último eje, el número correspondiente a la temperatura en grados Fahrenheit,

31

Nuevamente tenemos:



32

$$F = 1.8C + 32$$

$$C \in \mathbb{R}$$

C = temperatura en grados centígrados
F = temperatura en grados Fahrenheit

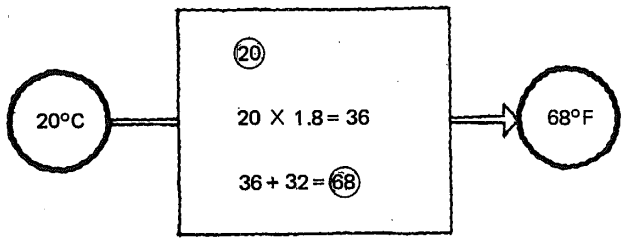
En el modelo algebraico la
regla podría ser enunciada así:

- Tómese el número correspondiente a una temperatura en grados centígrados.
- Multipliquese por 1.8.
- Súmese 32 al producto obtenido

La suma representa la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit

(véase el esquema del cuadro siguiente)

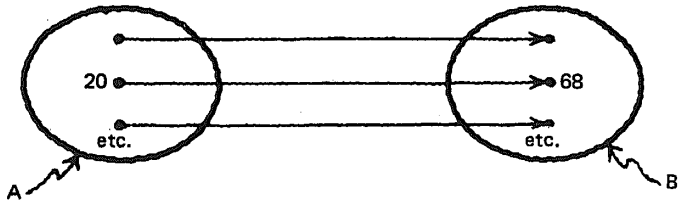
33



34

Observemos que

a cada número que representa una **temperatura en grados centígrados** le corresponde un número que representa una **temperatura en grados fahrenheit**



35

En 3 queremos saber el **peso** promedio en kilogramos de un hombre de talla mediana de acuerdo con su **estatura** en metros.

Los elementos del conjunto A son

Los elementos del conjunto B son

- números reales que representan **estaturas** en metros.
- números reales que representan **pesos** en kilogramos.

36

En este caso, el modelo está dado en forma de tabla:

Estatura (en m)	Peso (en kg)
1.570	De 53.500 a 58.500
1.595	54.900 60.300
1.620	55.300 61.700
1.645	57.600 63.000
1.670	58.900 64.800
1.695	60.800 66.700
1.720	62.600 68.900
1.745	64.400 70.800
1.770	66.200 72.600

La **correspondencia** se establece aquí en forma **directa.** La regla queda reducida a leer directamente los números que representan **pesos** en el renglón correspondiente a la **estatura.**

37

Observemos que

a cada número que representa una **estatura** en metros } le corresponde { más de un número que representa **peso** en kilogramos

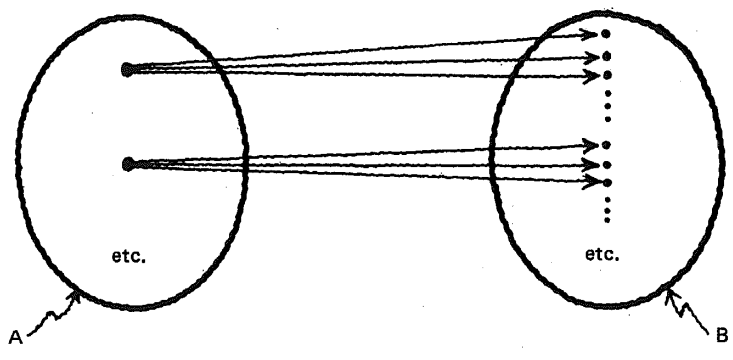
Por ejemplo:

A (1.570) ⟶ le corresponde $\{x/x \in \mathcal{R} \wedge 53.5 \leqslant x \leqslant 58.5\}$

conjunto de números reales comprendidos entre 53.5 y 58.5, incluyendo a estos números.

38

Esquemáticamente:



39

En 7 se **relaciona** el número de **calorías** que una persona de 25 años de edad, de sexo masculino, necesita teóricamente consumir con su **peso** deseado en kilos.

Los elementos del conjunto A son _____

Los elementos del conjunto B son _____

- números reales que representan **pesos** en kilogramos
- números reales que representan **calorías**

40

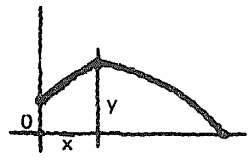
También aquí, el modelo está dado en forma de tabla:

Peso deseado (en kg)	Calorías necesarias
49.900	2 350
54.800	2 550
59.900	2 700
64.900	2 800
69.800	3 000
74.800	3 200
76.800	3 350
84.800	3 500

La **correspondencia** se establece en forma **directa** pero, en este caso, a cada número que representa un **peso deseado** en kilogramos le corresponde un número, y sólo uno, que representa **calorías necesarias.**

41

En 10:



Los elementos (x) del conjunto A son _____

Los elementos (y) del conjunto B son _____

- números reales que representan **distancias horizontales** medidas a partir del punto de lanzamiento del proyectil
- números reales que representan **alturas** medidas a partir del suelo

42

La

regla de correspondencia

para el modelo algebraico

$$y = -0.12x^2 + 1.2x + 2$$

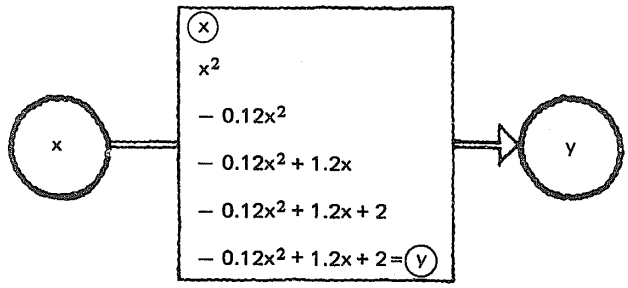
podría enunciarse así:

- Tomar el número que representa una distancia horizontal dada.
- Elevarlo al cuadrado.
- Multiplicar el resultado por -0.12.
- Sumar al producto obtenido 1.2 veces el número considerado.
- Sumar al resultado el número 2.

La suma obtenida es un número que representa la altura del proyectil en el instante considerado.

(véase el esquema del cuadro siguiente)

43



44

En 11 obtenemos → el **precio** del kilovatio hora

el **precio** del kilovatio hora → en **función** del **consumo** en kilovatios hora.

Los elementos de A son _____

Los elementos de B son _____

- números reales que representan

  kilovatios hora

  de consumo

- números reales que representan

  precios del kilovatio hora

45

La **correspondencia**
se establece por medio de las 3
proposiciones siguientes en que:
x es el consumo en kWh y
y es el precio del kilovatio hora en pesos.

1. Si $0 < x \leqslant 50$, entonces
   $y = 0.64$
2. Si $50 < x \leqslant 100$, entonces
   $y = 1.09$
3. Si $x > 100$, entonces
   $y = 1.97$

46

En este estudio introductorio
hemos empleado

relación — relacionar

y

función

con el significado que
estos términos tienen en
el lenguaje común.

47

En lo sucesivo
daremos a los términos

relación

y

función

un significado
matemático más preciso.

2.7.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.
Describir algunas
situaciones en que

se relacionen

los elementos de dos
conjuntos por medio
de una regla de
correspondencia.

2.7.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *describir* situaciones en las que se relacionen los elementos de dos conjuntos por medio de una regla de correspondencia.

7.2

Producto cartesiano

48

He aquí dos conjuntos:

$A = \{ a, b, c \}$ $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Si tomamos un elemento del conjunto A y un elemento del conjunto B, podemos formar una **pareja** o **par** de elementos.

Por ejemplo:

La pareja b 3

49

$A = \{ a, b, c \}$ $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Convengamos en:

1. Tomar en primer lugar un elemento de A y en segundo lugar un elemento de B,
2. representar el par en esta forma:

(b, 3)

50

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

(b, 3)

Llamemos

par ordenado

a una combinación tal de elementos.

51

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

(b, 3)

Este será el **primer componente** del par ordenado,

y éste el **segundo componente** del par ordenado.

52

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

El juego consiste ahora en formar **todos los pares ordenados** que sea posible con los elementos de A y B, tomando los **elementos de A** como **primeros componentes.**

(a, 1)
(a, 2)
(a, 3)
(a, 4)
(b, 1)
(b, 2)
(b, 3)
(b, 4)
(c, 1)
(c, 2)
(c, 3)
(c, 4)

(dados en cualquier orden)

53

Podemos

formar un conjunto

tomando como
elementos estos

pares ordenados:

(a, 1)	(b, 1)	(c, 1)
(a, 2)	(b, 2)	(c, 2)
(a, 3)	(b, 3)	(c, 3)
(a, 4)	(b, 4)	(c, 4)

54

Llamaremos **producto cartesiano** o **producto cruz** a un conjunto como éste y lo representaremos simbólicamente así.

Por extensión:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$

se lee **"A cruz B"**

55

Atención.

En general, por comprensión:

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$$

56

Atención.

Por supuesto, dados los conjuntos

$A = \{ a, b, c \}$ y $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

nada nos impide
definir el
producto cartesiano

$B \times A =$ [ ]

Por comprensión

Ilamando "y" a los elementos de "B", y "x" a los de "A".

$\{(y, x)/y \in B \wedge x \in A\}$

57

Estudiar con atención.

$A \times B = \{ (x, y)/x \in A \wedge y \in B \}$

"A cruz B"

$B \times A = \{ (y, x)/y \in B \wedge x \in A \}$

"B cruz A"

58

$A = \{ a, b, c \}$ $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4) \}$

$B \times A =$ [ ]

Por extensión o enumeración de sus elementos

$\{(1, a) (1, b) (1, c), (2, a) (2, b) (2, c), (3, a) (3, b) (3, c), (4, a) (4, b) (4, c)\}$

(con los elementos — pares ordenados — dados en cualquier orden)

59

Ahora bien, convendremos en que

$$(a, b) \neq (b, a)$$

a menos que

$$a = b$$

60

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

61

Siempre debemos recordar que

si $a \neq b$,
$(a, b) \neq (b, a)$

y

si $A \neq B$,
$A \times B \neq B \times A$

62

Consideremos estos dos conjuntos:

$C = \{1, 2, 3\}$ $D = \{1, 2, 3\}$

Por extensión o enumeración de sus elementos:

$C \times D =$ ⌊_____⌋

$\{(1,1), (1, 2), (1, 3),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

(con los elementos —pares ordenados — enumerados en cualquier orden)

63

$C = \{1, 2, 3\}$ $D = \{1, 2, 3\}$

$D \times C =$ ⌊_____⌋

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

(en cualquier orden)

64

$C = \{1, 2, 3\}$ $D = \{1, 2, 3\}$

$C \times D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$D \times C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$C \times D$ ⌊_____⌋ $D \times C$
$= o \neq$

- $C \times D = D \times C$
  porque, en este caso:
  $C = D$

65

Dado el producto cartesiano C× D.

Si C = D

entonces podemos escribir:

C× C (o D× D)

o bien:

C^2 (o D^2)

66

Tomemos
otros dos conjuntos más:

E = {□ , ○ , △ ,} F = {● ,◆}

E× F = [_____]

{(□, ●), (□, ◆), (○, ●),
(○, ◆), (△, ●), (△, ◆)}

(en cualquier orden)

67

E = {□, ○, △} F = {●,◆}

F× E = [_____]

{ (●, □), (●, ○), (●, △)
(◆, □), (◆, ○), (◆, △)}

(en cualquier orden)

68

$E = \{\square, \bigcirc, \triangle\}$ $F = \{\bullet, \blacklozenge\}$

$E \times F = \{(\square, \bullet), (\square, \blacklozenge), (\bigcirc, \bullet), (\bigcirc, \blacklozenge), (\triangle, \bullet), (\triangle, \blacklozenge)\}$

$F \times E = \{(\bullet, \square), (\bullet, \bigcirc), (\bullet, \triangle), (\blacklozenge, \square), (\blacklozenge, \bigcirc), (\blacklozenge, \triangle)\}$

$E \times F \; \square \; F \times E$
$= \text{ó} \neq$

$\neq$

69

No olvidemos que:

$\{\spadesuit, \diamondsuit\} \; \square \; \{\diamondsuit, \spadesuit\}$
$= \text{ó} \neq$
$(\spadesuit, \diamondsuit) \; \square \; (\diamondsuit, \spadesuit)$

$=$

$\neq$

70

Detengámonos un momento en esto.

$\{\spadesuit, \diamondsuit\} = \{\diamondsuit, \spadesuit\}$
$(\spadesuit, \diamondsuit) \neq (\diamondsuit, \spadesuit)$

71

Dos conjuntos más:

G = { Alberto, Enrique, Leonardo}

H = { Rocío, Patricia }

G X H = [_____]

{(Alberto, Rocío),
(Alberto, Patricia),
(Enrique, Rocío),
(Enrique, Patricia),
(Leonardo, Rocío),
(Leonardo, Patricia)}
(en cualquier orden)

72

G = { Alberto, Enrique, Leonardo}

H = { Rocío, Patricia }

H X G = [_____]

{(Rocío, Alberto),
(Rocío, Enrique),
(Rocío, Leonardo),
(Patricia, Alberto),
(Patricia, Enrique),
(Patricia, Leonardo)}
(en cualquier orden)

73

Matemáticamente, estamos considerando que, por ejemplo:

(Rocío, Alberto) ≠ (Alberto, Rocío)

2.7.2.1

Práctica adicional,
si se considera necesario,
de formación de
productos cartesianos
a partir de dos
conjuntos dados.

74

Ahora bien:

$A = \{a, b, c\}$ Número de elementos de A → [ ]
$B = \{1, 2, 3, 4\}$ Número de elementos de B → [ ]

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$

Número de elementos de $A \times B$ → [ ]

3
4
12

75

Al

número de elementos

de un conjunto
le hemos llamado

[ ]

cardinalidad

76

La expresión

$n(A) = 3$

la leemos así:

└_____┘

"La cardinalidad del conjunto A es igual a 3."

77

Entonces:

$A = \{ a, b, c \}$ $n(A) =$ └_____┘ 3

$B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $n(B) =$ └_____┘ 4

$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4) \}$

$n(A \times B) =$ └_____┘ 12

78

$C = \{ 1, 2, 3 \}$ $n(C) =$ └_____┘ 3

$D = \{ 1, 2, 3 \}$ $n(D) =$ └_____┘ 3

$C \times D = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$

$n(C \times D) = n(C^2) =$ └_____┘ 9

79

$E = \{\square, \bigcirc, \triangle\}$ $\quad n(E) = \underline{\quad}$ 3

$F = \{\bullet, \blacklozenge\}$ $\quad n(F) = \underline{\quad}$ 2

$E \times F = \{(\square, \bullet), (\square, \blacklozenge), (\bigcirc, \bullet), (\bigcirc, \blacklozenge), (\triangle, \bigcirc), (\triangle, \blacklozenge)\}$

$n(E \times F) = \underline{\quad}$ 6

80

$G = \{$ Alberto, Enrique, Leonardo$\}$

$F = \{$ Rocío, Patricia$\}$

$n(G) = \underline{\quad}$ 3

$n(F) = \underline{\quad}$ 2

$n(G \times F) = \underline{\quad}$ 6

$n(F \times G) = \underline{\quad}$ 6

81

Atención.

Observamos que

si el conjunto A tiene a elementos
y el conjunto B tiene b elementos,

entonces

el producto cartesiano $A \times B$
tiene $\underline{\quad}$ elementos,

y el producto cartesiano $B \times A$
tiene $\underline{\quad}$ elementos.

- $a \times b$ (por)
- $a \times b$ (= $b \times a$) (por)

82

Observemos con atención.

producto cartesiano — producto (a secas)

$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

cruz — por

83

$A = \{a, b, c\}$ $\quad B = \{1, 2, 3, 4\}$

- $n(A) = 3$
- $n(B) = 4$

$n(A \times B) = n(B \times A) = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$

¡Acabamos de "inventar" la multiplicación!

84

Atención.

A y B representan **conjuntos**

cruz

- $A \times B \neq B \times A$

$A \times B$ y $B \times A$ representan **productos cartesianos**

a y b representan **cardinalidades de conjuntos**

- $a \times b = b \times a$

por

$a \times b$ y $b \times a$ representan **productos** (a secas)

85

$L = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
$M = \{ a, e, i, o, u \}$

$n(L) =$ ____
$n(M) =$ ____
$n(L \times M) =$ ____ = ____
$n(M \times L) =$ ____ = ____

7
5
$7 \times 5 = 35$
$5 \times 7 = 35$

86

$R = \{ b, c, d, f, g, h \}$
$S = \{ i \}$

$n(R) =$ ____
$n(S) =$ ____
$n(R \times S) =$ ____ = ____
$n(S \times R) =$ ____ = ____

6
1
$6 \times 1 = 6$
$1 \times 6 = 6$

87

$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
$P = \{ \phi \}$

$n(N) =$ ____
$n(P) =$ ____
$n(N \times P) =$ ____ = ____
$n(P \times N) =$ ____ = ____

5
0
$5 \times 0 = 0$
$0 \times 5 = 0$

2.7.2.2

Práctica adicional,
si se considera necesario,
de determinación de la
cardinalidad de
un producto cartesiano
dado.

88

Ahora vamos a
"inventar" una
manera de

representar
gráficamente

los

productos cartesianos.

89

Sean los conjuntos:

$A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Llamemos x
a cualquier elemento de A

e y a cualquier elemento de B.

90

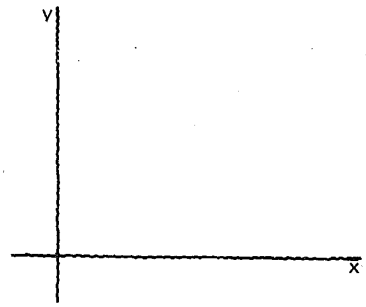
Tomemos dos rectas perpendiculares entre sí, y llamémoslas

"eje de las x"

y

"eje de las y",

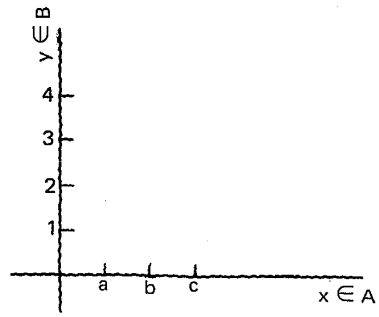
respectivamente.



91

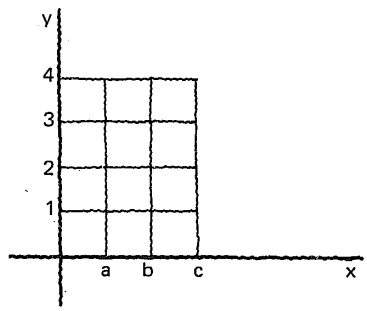
$A = \{ a, b, c \}$
$B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Indiquemos los elementos de A en el eje de las x, y los elementos de B en el eje de las y.



92

Por los puntos señalados tracemos rectas paralelas a los ejes, como se indica.



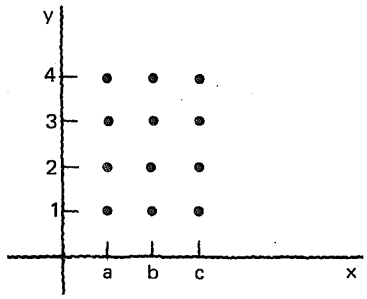
93

Ahora destaquemos los

puntos de intersección

de las rectas trazadas, los cuales representarán los

elementos del producto cartesiano.



94

Ésta es la representación gráfica de

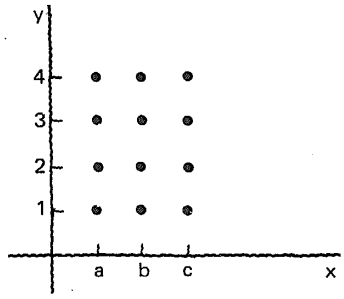
$A \times B$

en que

$A = \{a, b, c\}$

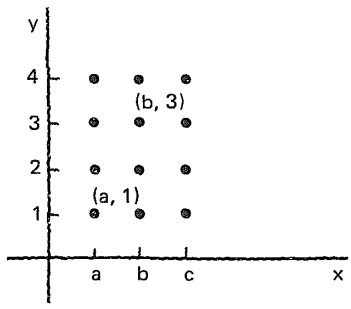
y

$B = \{1, 2, 3, 4\}$



95

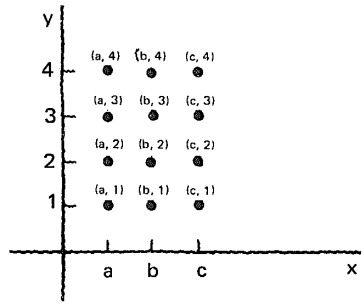
Indicar los pares ordenados faltantes.



Respuesta en el cuadro siguiente

Al observar la gráfica
nos damos cuenta de que:

$n(A) = 3$
$n(B) = 4$
y
$n(A \times B) = 4 \times 3 = 12$



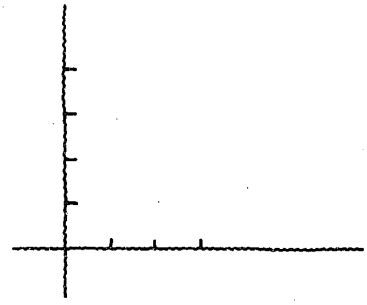
96

Representar gráficamente
el producto cartesiano

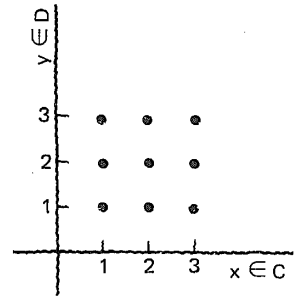
$C \times D$

en que:

$C = \{1, 2, 3\}$
y
$D = \{1, 2, 3\}$



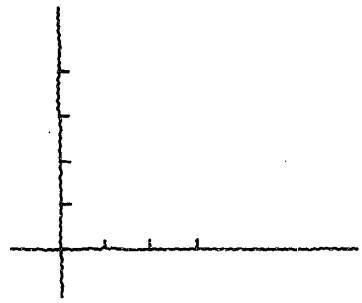
Representación gráfica
de $C \times D$ ó C^2:

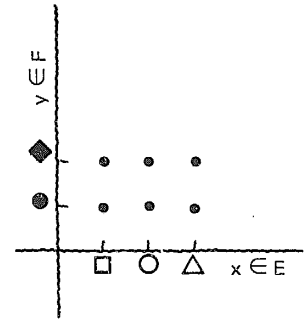


97

Representar gráficamente
el producto cartesiano E X F
en que:

$E = \{\square, \bigcirc, \triangle\}$
y
$F = \{\bullet, \blacklozenge\}$

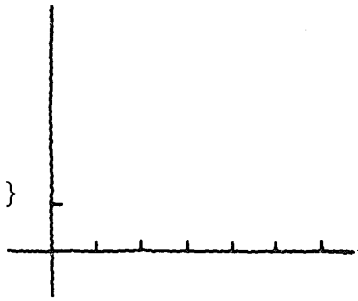


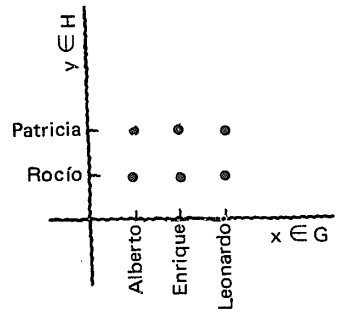


98

Trazar la gráfica
de G X H
en que:

G = { Alberto, Enrique, Leonardo }
y
H = { Rocío, Patricia }

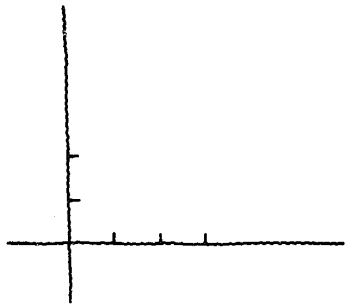


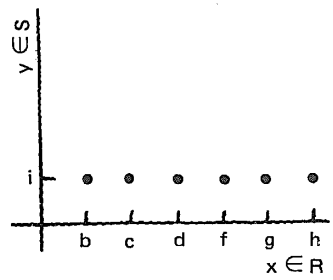


99

Trazar la gráfica
de R X S en que:

R = { b, c, d, f, g, h }
y
S = { i }

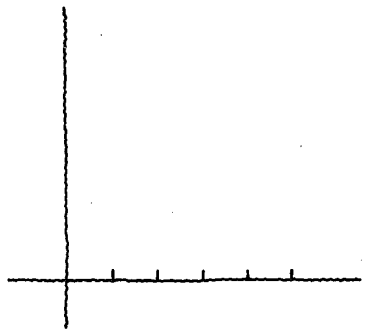




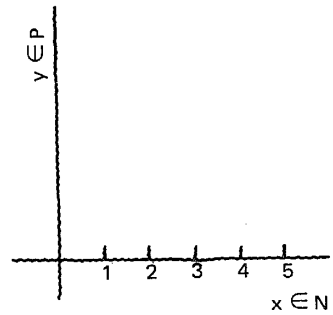
100

Trazar la gráfica
de N X P en que:

N = { 1, 2, 3, 4, 5 }
y
P = { ϕ }



El producto cartesiano
N X P no tiene elementos

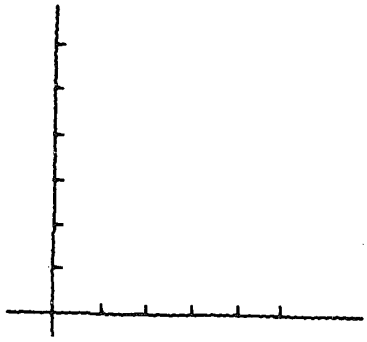


N X ϕ = ϕ

101

Trazar la gráfica de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^2$ en que:

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \}$



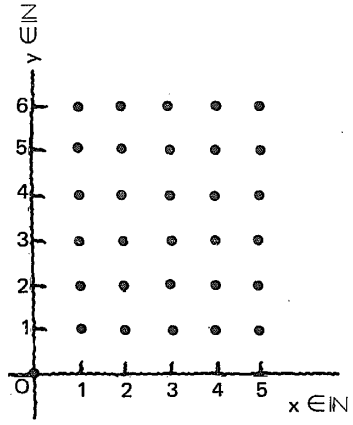
Respuesta en el cuadro siguiente

Esta es una representación gráfica

parcial

del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^2$

Observemos que la gráfica no puede ser trazada en forma completa, pero podemos imaginarnos el resto.

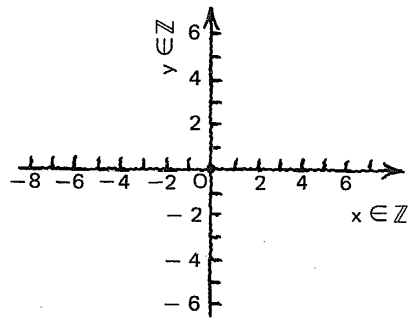


102

Para representar gráficamente el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es necesario establecer otras convenciones como se muestra en el cuadro siguiente.

103

Estudiar con atención.

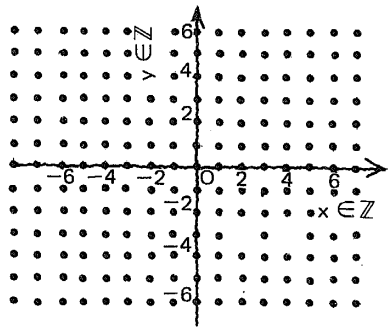


104

Ésta sería una representación gráfica

parcial

del producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.



105

¿Qué aspecto tendría la representación gráfica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

106

La representación gráfica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ implica "todos" los puntos del plano.

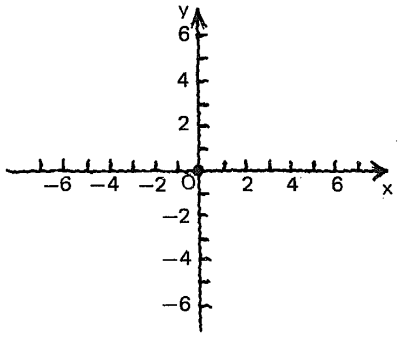
¡Imaginémoslos!

107

A cada par ordenado de números reales (a, b) corresponde un punto del plano, y sólo uno,

y

cada punto del plano es la representación gráfica de un par ordenado (a, b) de números reales, y sólo uno.

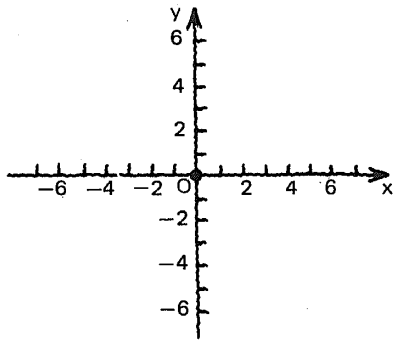


108

Se conoce con el nombre de

plano cartesiano

a este tipo de representación gráfica.



109

Un punto del plano queda definido por medio de dos números usualmente llamados

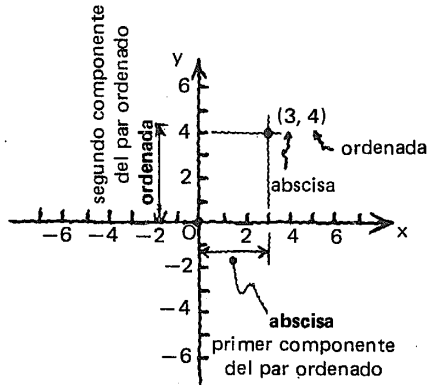
coordenadas del punto:

la

abscisa

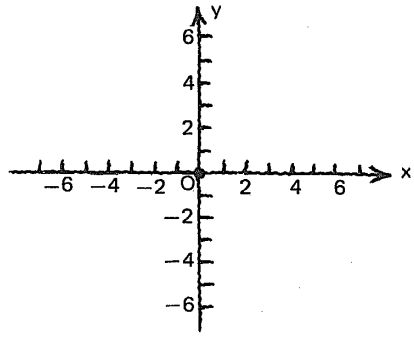
y la

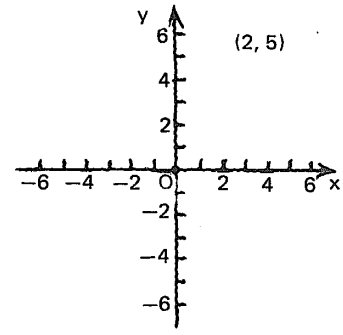
ordenada.



110

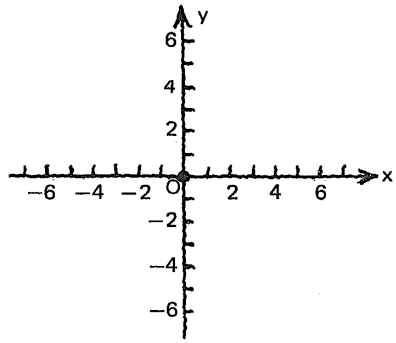
Representar gráficamente el par ordenado (2, 5)

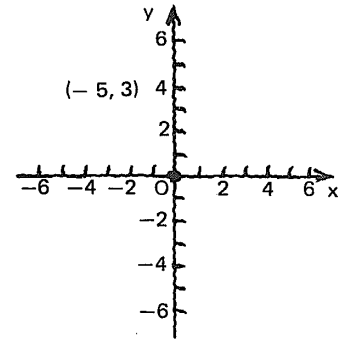




111

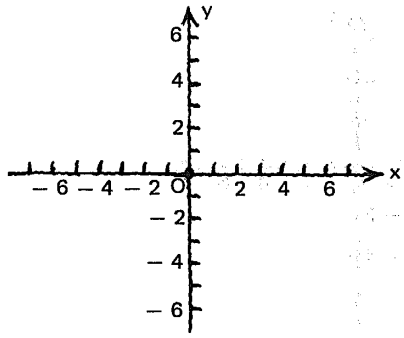
Representar gráficamente el par ordenado (− 5, 3)

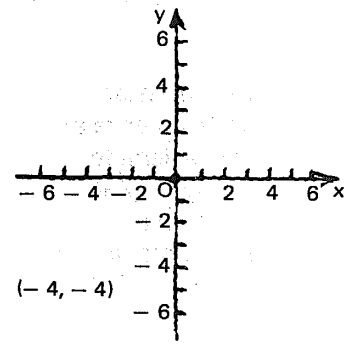




112

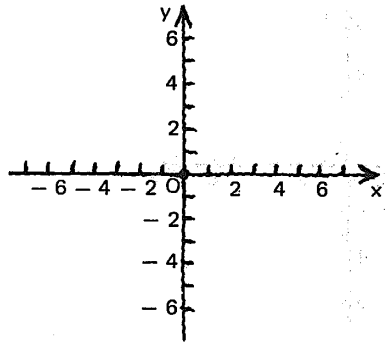
Representar gráficamente el par ordenado $(-4, -4)$

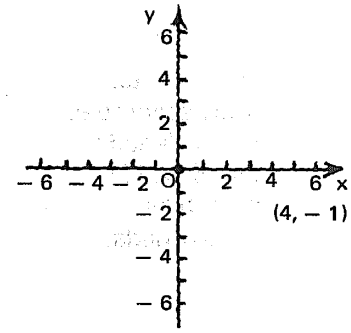




113

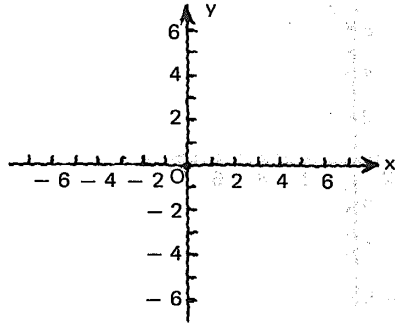
Representar gráficamente el par ordenado $(4, -1)$

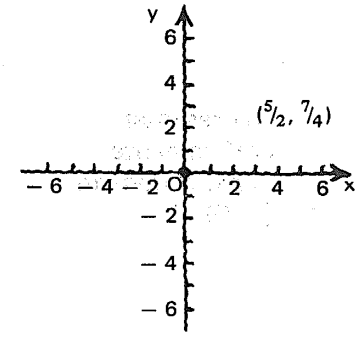




114

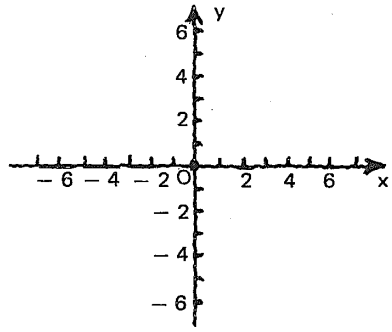
Representar gráficamente el par ordenado (5/2, 7/4) en forma aproximada

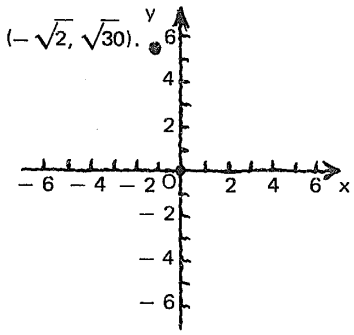




115

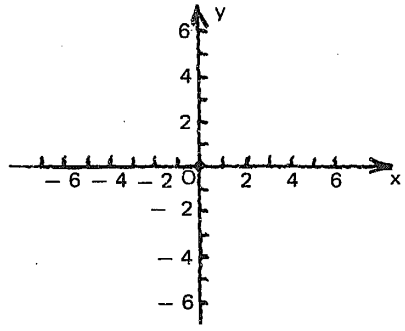
Representar gráficamente el par ordenado $(-\sqrt{2}, \sqrt{30})$ en forma aproximada.

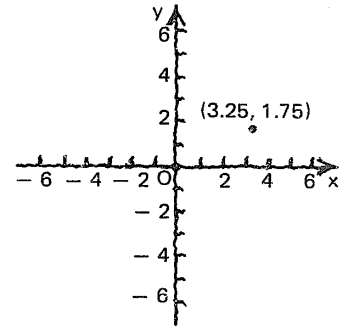




116

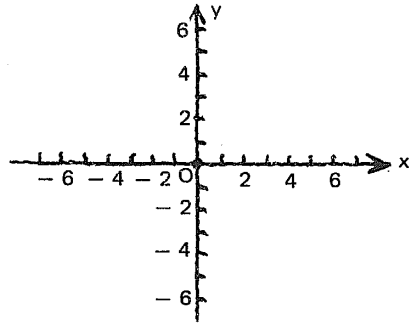
Representar gráficamente el par ordenado (3.25, 1.75) en forma aproximada.

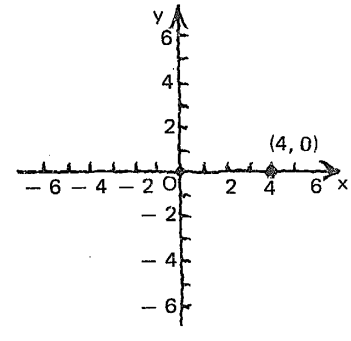




117

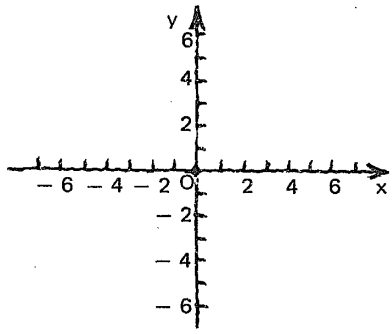
Representar gráficamente el par ordenado (4, 0)

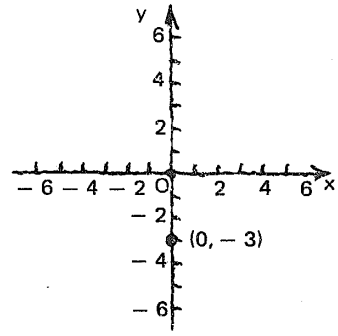




118

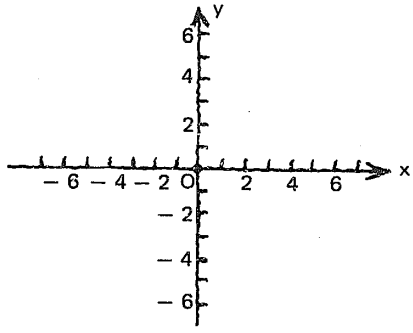
Representar gráficamente el par ordenado (0, – 3)

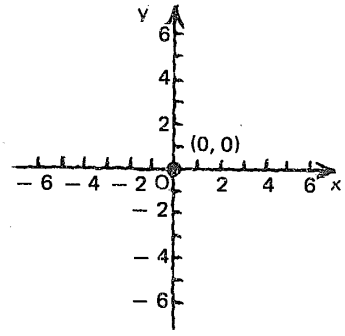




119

Representar gráficamente el par ordenado (0, 0).





2.7.2.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.7.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *formar* un producto cartesiano, a partir de dos conjuntos dados;
- *representar* gráficamente un producto cartesiano dado;
- *representar*, en el plano cartesiano, un par ordenado dado.

7.3

Relaciones

120

Consideremos nuevamente los conjuntos G y H:

$$G = \{\overset{(15)}{\text{Alberto}}, \overset{(15)}{\text{Enrique}}, \overset{(16)}{\text{Leonardo}}\}$$

$$H = \{\overset{(15)}{\text{Rocío}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}}\}$$

Los números indicados representan las

edades

de los elementos de cada conjunto.

121

Hemos visto que el
producto cartesiano
G X H (que se lee
G "cruz" H)
es el conjunto formado
por todos los pares
ordenados posibles,
tomando como
primer componente
un elemento de G
y como
segundo componente
un elemento de H

122

$G = \{ \overset{(15)}{\text{Alberto}}, \overset{(15)}{\text{Enrique}}, \overset{(16)}{\text{Leonardo}} \}$

$H = \{ \overset{(15)}{\text{Rocío}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}} \}$

$G \times H =$ [ ]

{(Alberto, Rocío),
(Alberto, Patricia),
(Enrique, Rocío),
(Enrique, Patricia),
(Leonardo, Rocío),
(Leonardo, Patricia)}

123

$G \times H = \{ (\overset{(15)}{\text{Alberto}}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}), (\overset{(15)}{\text{Alberto}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}}),$
$(\overset{(15)}{\text{Enrique}}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}), (\overset{(15)}{\text{Enrique}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}}),$
$(\overset{(16)}{\text{Leonardo}}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}), (\overset{(16)}{\text{Leonardo}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}}) \}$

Ahora nos interesa formar un conjunto
de pares ordenados en que
los dos componentes tengan **la misma edad:**

$R_1 =$ [ ]

{(Alberto, Rocío),
(Enrique, Rocío)}

124

$G = \{ \overset{(15)}{\text{Alberto}}, \overset{(15)}{\text{Enrique}}, \overset{(16)}{\text{Leonardo}} \}$ $H = \{ \overset{(15)}{\text{Rocío}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}} \}$

$G \times H = \{(\overset{(15)}{\text{Alberto}}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}), (\overset{(15)}{\text{Alberto}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}}), (\overset{(15)}{\text{Enrique}}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}),$
$(\overset{(15)}{\text{Enrique}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}}), (\overset{(16)}{\text{Leonardo}}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}), (\overset{(16)}{\text{Leonardo}}, \overset{(14)}{\text{Patricia}}) \}$

Conjunto de pares ordenados en que **los dos componentes** tienen **la misma edad:**

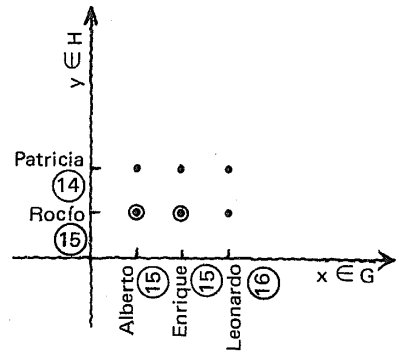
$R_1 = \{(\text{Alberto, Rocío}), (\text{Enrique, Rocío})\}$

125

Expresemos gráficamente lo anterior. Los puntos ◉ pertenecen al

subconjunto de G × H,

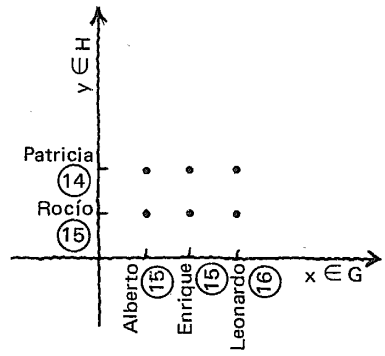
de elementos que cumplen con la condición señalada.



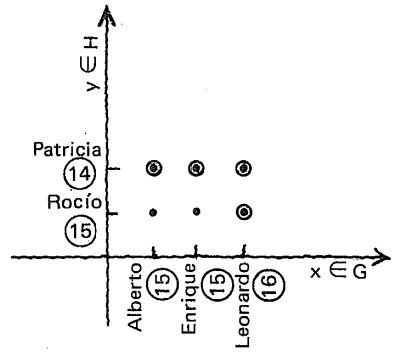
126

Encerrar en un círculo los puntos que representen los elementos de G × H, tales que: la edad del muchacho sea mayor que la de la muchacha.

$R_2 =$ [ ]



Respuesta en el cuadro siguiente



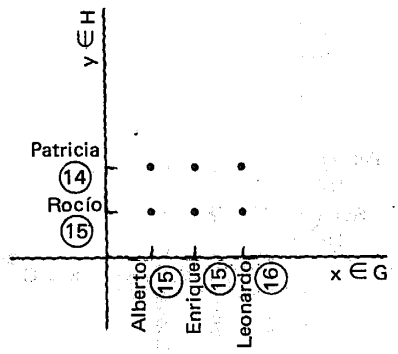
R_2 = {(Alberto, Patricia), (Enrique, Patricia),

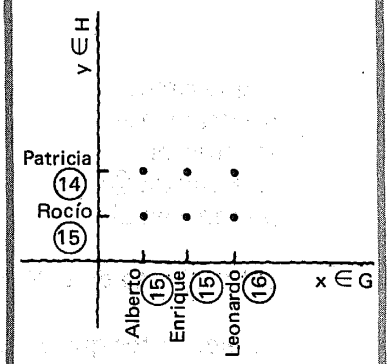
(Leonardo, Rocío), (Leonardo, Patricia)}

127

Encerrar en un círculo los puntos que representen los elementos de G X H, tales que: la edad del muchacho sea menor que la de la muchacha.

$R_3 =$ [ ]



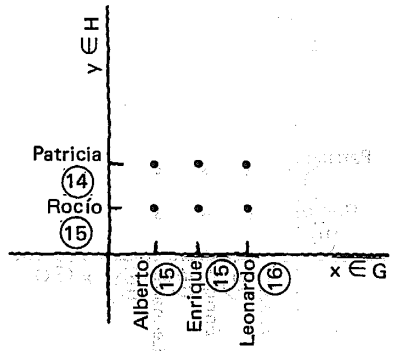


$R_3 = \{\phi\}$

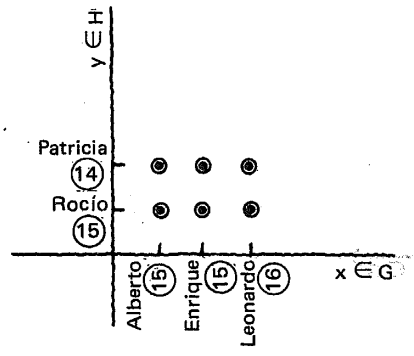
128

Encerrar en un círculo los puntos que representen los elementos de G X H, tales que: la edad del muchacho sea igual o mayor que la de la muchacha.

$R_4 =$ [ ]



Respuesta en el cuadro siguiente



$R_4 = \{$ (Alberto, Rocío), (Alberto, Patricia), (Enrique, Rocío), (Enrique, Patricia), (Leonardo, Rocío), (Leonardo, Patricia)$\}$

129

Llamaremos

relación

a un

subconjunto de un producto cartesiano,

cuyos elementos cumplen con una cierta condición.

130

En una

relación de A × B

podemos identificar dos conjuntos (A y B) y una regla de correspondencia, que permite asignar

a cada uno de los elementos de A

uno o más elementos de B.

131

En una

relación de A × B

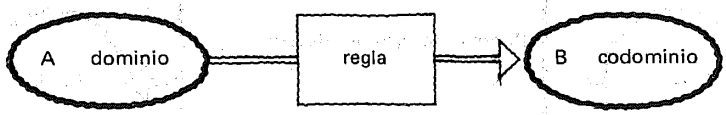
al conjunto A lo llamaremos

dominio

y al conjunto B

codominio

o contradominio.



132

En la relación

$$R_1 = \{ (\text{Alberto}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}), (\text{Enrique}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}) \}$$

la regla de correspondencia
asigna al elemento **Alberto**
el elemento **Rocío,**
y al elemento **Enrique**
el elemento **Rocío.**

133

En la relación

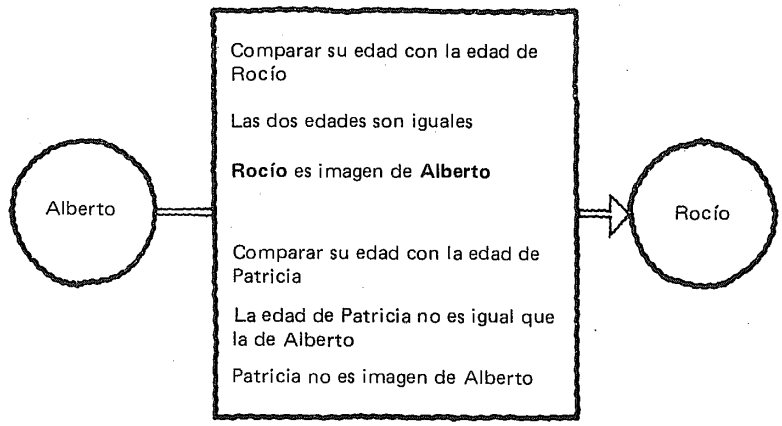
$$R_1 = \{ (\text{Alberto}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}), (\text{Enrique}, \overset{(15)}{\text{Rocío}}) \}$$

diremos que:

Rocío es la **imagen** de **Alberto**
y que
Rocío es la **imagen** de **Enrique**

134

Observemos con atención este esquema.



135

En una relación
llamaremos

rango

al

**conjunto de todas
las imágenes.**

136

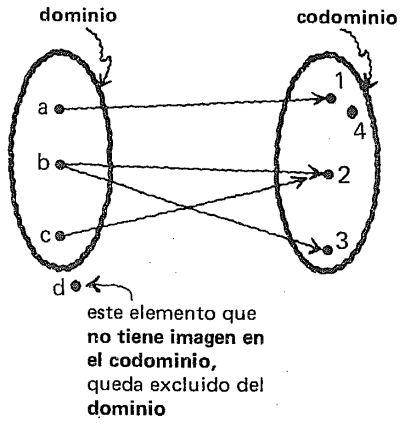
Debemos tener presente
que, en este estudio,

**cada uno de los elementos
del dominio**

debe tener

**al menos una imagen
en el codominio.**

Observemos que en el codominio puede haber elementos que no sean imagen de ninguno de los elementos del dominio.



137

$R_1 = \{ (\text{Alberto, Rocío}), (\text{Enrique, Rocío}) \}$

En esta relación:

El **dominio** es [ ]

El **rango** es [ ]

{Alberto, Enrique}

{Rocío}

138

$$R_1 = \{(\text{Alberto, Rocío}), (\text{Enrique, Rocío})\}$$

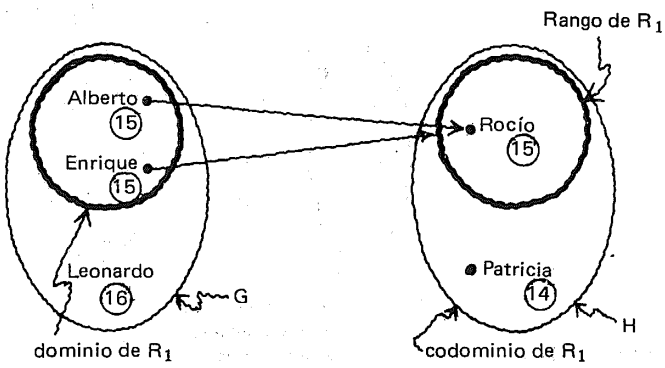
La regla de correspondencia
puede expresarse así:

$$e_x = e_y$$

en que $\begin{cases} e_x = \text{edad de un elemento de G} \\ e_y = \text{edad de un elemento de H} \end{cases}$

139

Veamos todo lo anterior en forma gráfica



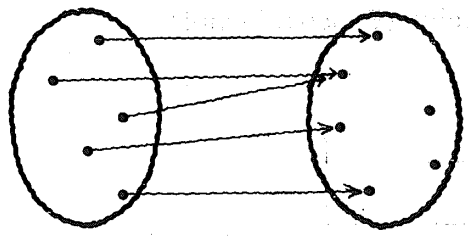
Rocío es la **imagen** de Alberto
Rocío es la **imagen** de Enrique

140

LLamaremos

gráfica sagital

a una representación
de este tipo.



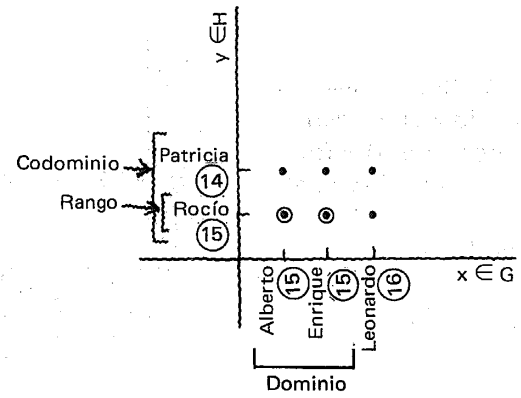
141

Volvamos a la

gráfica cartesiana

de R_1

Rocío es la **imagen** de Alberto
Rocío es la **imagen** de Enrique



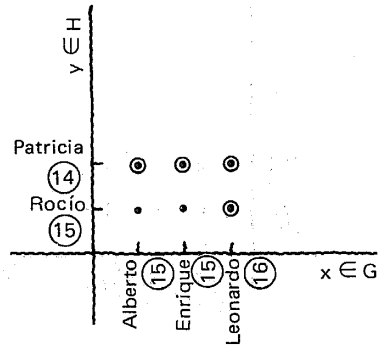
142

Ahora consideremos
la relación R_2 en que:

la edad del muchacho es mayor que la de la muchacha.

$R_2 = \{$(Alberto, Patricia),
(Enrique, Patricia),
(Leonardo, Rocío),
(Leonardo, Patricia)$\}$

El dominio es _____
El codominio es _____

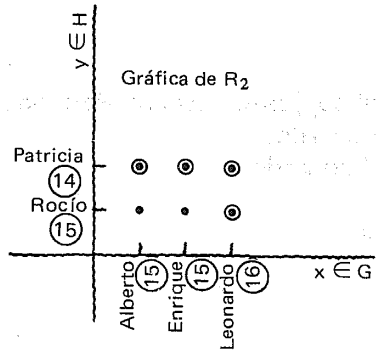


$G = \{$(Alberto, Enrique, Leonardo$\}$
$H = \{$Rocío, Patricia$\}$

143

La regla de
correspondencia
puede expresarse así:

_____

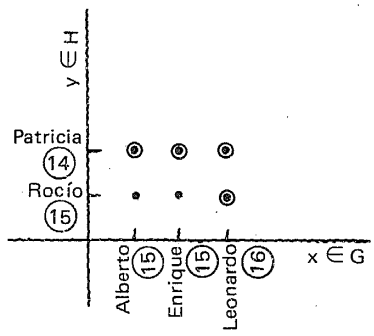


$e_x > e_y$

144

$R_2 = \{$(Alberto, Patricia),
(Enrique, Patricia),
(Leonardo, Rocío),
(Leonardo, Patricia)$\}$

El rango de R_2 es



{Rocío, Patricia} = H

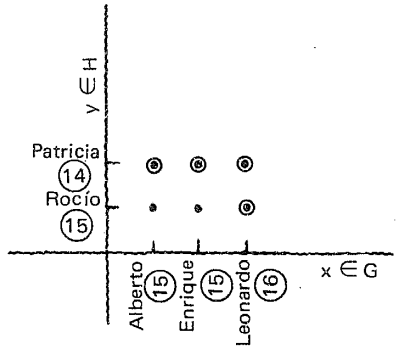
145

Atención.

La imagen de Alberto es

La imagen de Enrique es

La imagen de Leonardo es



- {Patricia}
- {Patricia}
- {Rocío, Patricia}

(Observemos que Alberto y Enrique tienen la misma imagen, y que Leonardo tiene dos imágenes)

146

Decimos que

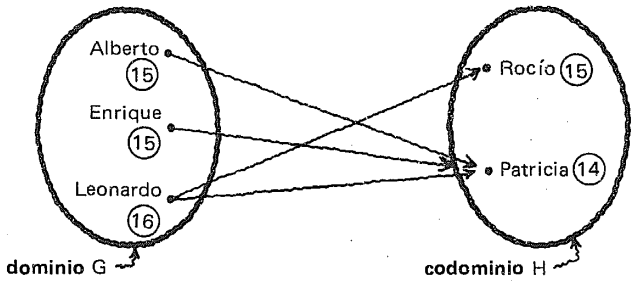
- **la imagen** de **Leonardo** es el conjunto {Rocío, Patricia}
- **Rocío** es **una imagen** de Leonardo.
- **Patricia** es **una imagen** de Leonardo.

La **imagen** de un elemento dado del dominio puede ser **un solo elemento** o **un conjunto de más de un elemento.**

147

Representar la relación R_2 por medio de una **gráfica sagital:**

Respuesta en el cuadro siguiente



La **imagen** de Alberto es ⌊_____⌋
La **imagen** de Enrique es ⌊_____⌋
La **imagen** de Leonardo es ⌊_____⌋

Patricia
Patricia
{Rocío, Patricia}

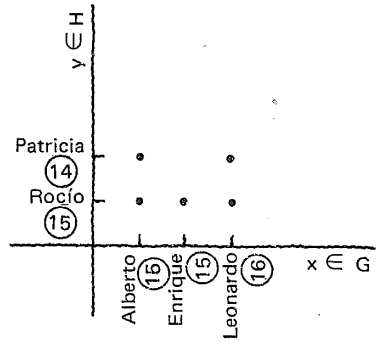
148

Consideremos R_3,

en que

$e_x < e_y$

Dominio = ⌊_____⌋
Codominio = ⌊_____⌋
Rango = ⌊_____⌋



La imagen de Alberto es ⌊_____⌋
La imagen de Enrique es ⌊_____⌋
La imagen de Leonardo es ⌊_____⌋

Atención.

Ningún elemento de G tiene imagen en H, **No** se define una relación en estas condiciones.

149

R_3 no es una relación,
de acuerdo con el criterio
establecido.

150

Atención.

Si

A y B son dos conjuntos,

y

A X B es su producto cartesiano,

entonces

una **relación** es un **subconjunto no vacío** de A X B.

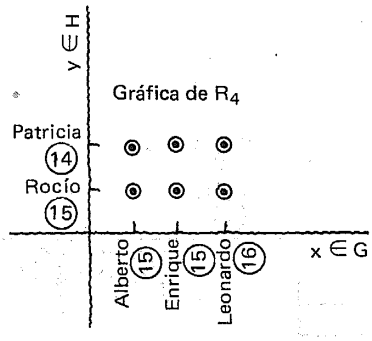
151

Consideremos R_4, en que

$e_x \geqslant e_y$:

Dominio = ⌊_____⌋
Codominio = ⌊_____⌋
Rango = ⌊_____⌋

La imagen de Alberto es ⌊_____⌋
La imagen de Enrique es ⌊_____⌋
La imagen de Leonardo es ⌊____⌋



G
H
H

H
H
H

(Véase cuadro siguiente)

152

Patricia es **una imagen** de Alberto.
Rocío es **una imagen** de Alberto.

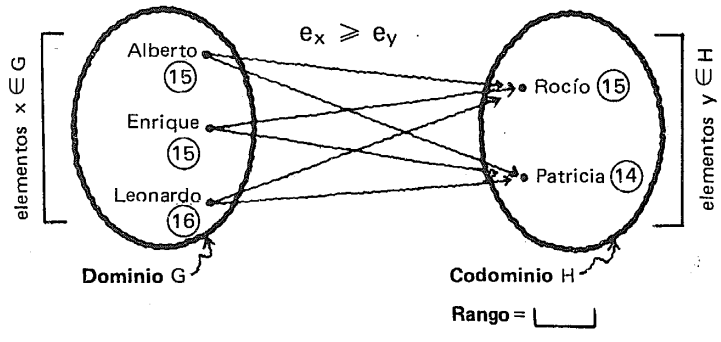
Patricia es **una imagen** de Enrique.
Rocío es **una imagen** de Enrique.

Patricia es **una imagen** de Leonardo.
Rocío es **una imagen** de Leonardo.

153

Representar la relación R_4 por medio de una **gráfica sagital:**

Respuesta en el cuadro siguiente



H

154

Sean los conjuntos:

$A = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 10 \} =$ [ ]

y

$B = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 5 \leqslant x \leqslant 15 \} =$ [ ]

Definirlos por extensión o enumeración de sus elementos.

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

155

$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B = \{ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

Vamos a definir una **relación** de A X B de tal manera que **el segundo componente** de cada par ordenado **sea igual al doble del primer** componente.

156

Atención.

$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B = \{ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

La relación buscada puede expresarse así:

$R = \{ (x, y)/x \in A, y \in B \wedge y = 2x \}$

157

$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

$B = \{ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \}$

$R = \{ (x, y)/x \in A, y \in B \wedge y = 2x \}$

$R =$ _____

Por extensión

$\{(3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14)\}$

158

$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

$B = \{ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \}$

$R = \{ (x, y)/x \in A, y \in B \wedge y = 2x \}$

$R = \{ (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14) \}$

El **dominio** de R es:

_____

Por extensión

$\{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$

Observemos que el **dominio de R** es un subconjunto no vacío propio o impropio de A.

159

$R = \{ (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14) \}$

El **rango** de R es:

_____

Por extensión

$\{ 6, 8, 10, 12, 14 \}$

El **rango de R** es un subconjunto no vacío propio o impropio de B.

160

$R = \{ (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14) \}$

La **imagen** de 3 es ⌊___⌋ 6
La **imagen** de 4 es ⌊___⌋ 8
La **imagen** de 6 es ⌊___⌋ 12
La **imagen** de 7 es ⌊___⌋ 14

En general,

La **imagen** de x es y = ⌊___⌋ 2x

161

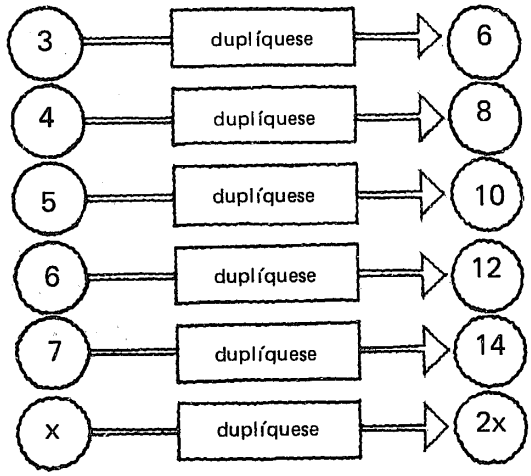
$R = \{ (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14) \}$

La **regla de correspondencia**
puede expresarse así:

⌊_____⌋ y = 2x

162

Esquemáticamente:

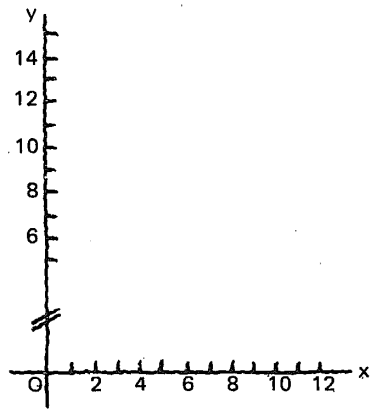


163

Completar la gráfica cartesiana de

$R = \{(3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14)\}$

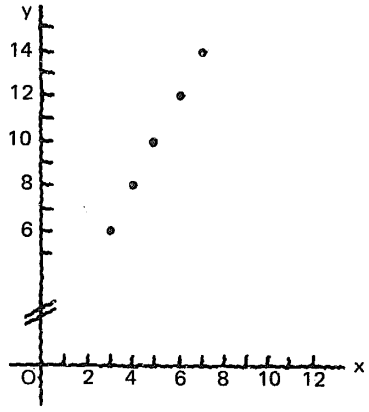
indicando con un punto ● cada uno de los elementos de la relación.



Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica cartesiana de

$R = \{(3,6), (4,8), (5,10), (6, 12), (7, 14)\}$



164

Trazar la gráfica sagital de

$R = \{(x, y)/x \in A, y \in B \wedge y = 2x\}$

en que:

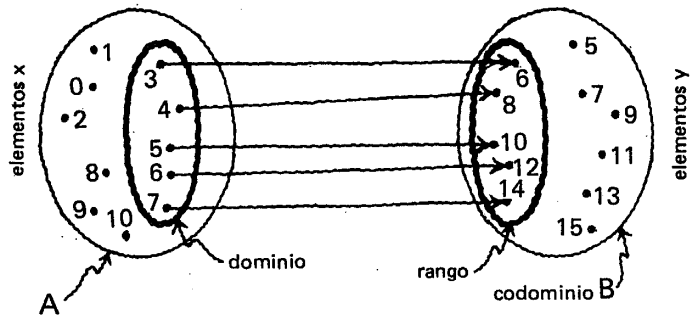
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

y

$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

indicando el dominio, el codominio y el rango.

Ver respuesta en el cuadro siguiente



165

Algunas observaciones
acerca de las

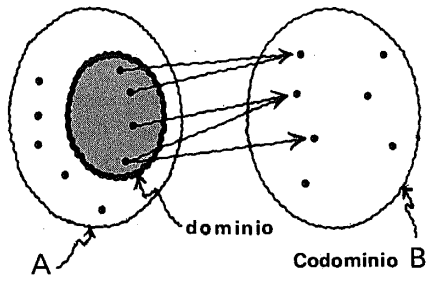
relaciones.

166

Dados dos conjuntos:
A y B

el **dominio** de una **relación de A en B** es el conjunto de los elementos de A que tienen **al menos una imagen** en el codominio:

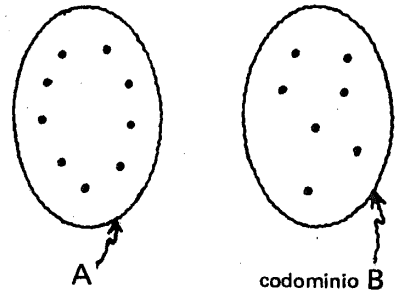
dominio $\subseteq$ **A**



167

Si ninguno de los elementos de A tiene al menos una imagen en B, entonces, el

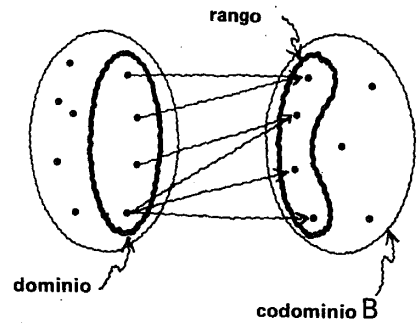
dominio $= \phi$ **y no se define relación alguna**



168

Dados dos conjuntos
A y B

el **rango*** de una **relación de A en B** es el conjunto de **todas la imágenes de los elementos del dominio, y únicamente de ellas.**

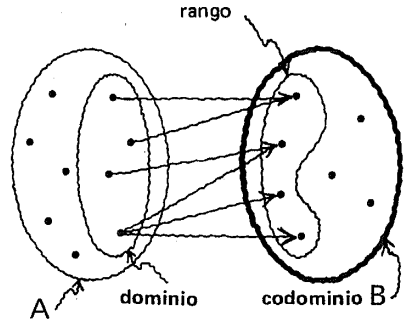


* Llamada por algunos autores: imagen del dominio.

169

El **codominio** es el conjunto B (de hecho, cualquier conjunto **que contenga todas las imágenes** de los elementos del dominio)

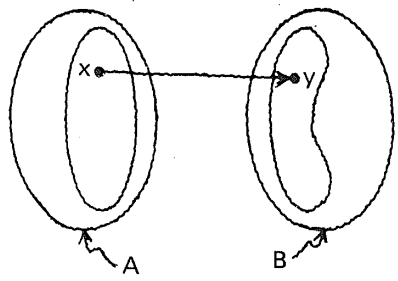
rango $\subseteq$ codominio



170

Imagen es el elemento o conjunto de elementos del codominio, que la regla de correspondencia asigna a un elemento dado del dominio. En este caso:

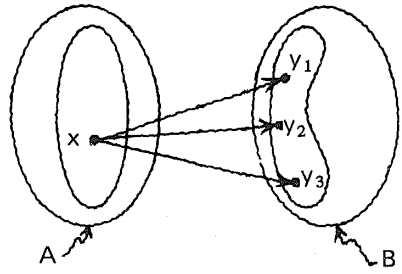
y es la imagen de x



171

Ahora, la imagen de x es $\{y_1, y_2, y_3\}$

- y_1 es una imagen de x
- y_2 es una imagen de x
- y_3 es una imagen de x



172

Podemos definir una relación mediante la enumeración de los elementos (pares ordenados) que la constituyen.

Ejemplo:

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$$

Dominio de $R_1 =$ [_____]

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

173

R_1 $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

Rango de R_1 [ ]

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$

174

$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

Codominio de R_1 = [ ]

Cualquier conjunto que contenga al rango como subconjunto (propio o impropio),
Por ejemplo:

$\mathbb{N}$

$\{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 10\}$

$\{x/x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leqslant x \leqslant 10\}$

↓

etcétera

175

$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

La imagen de 1 es [ ] 2
La imagen de 2 es [ ] 4
La imagen de 3 es [ ] 6
La imagen de 4 es [ ] 8
La imagen de 5 es [ ] 10

La imagen de x es [ ] 2x

176

$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

La **regla de correspondencia** puede expresarse **matemáticamente** así:

$y = 2x$

177

$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

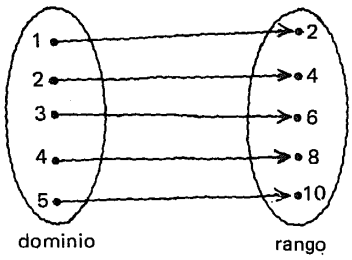
La **regla de correspondencia** puede expresarse, también, así:

- duplíquese
  o
- tómese el doble de:
  o
- multiplíquese por 2
  etcétera

178

$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

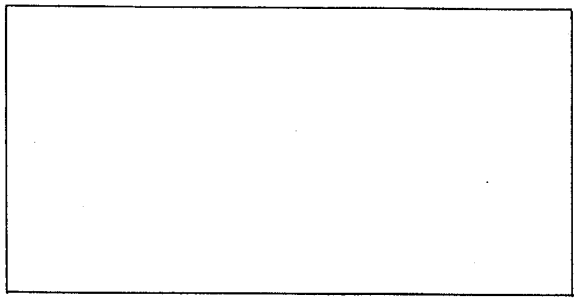
La **gráfica sagital** de R_1 puede tener este aspecto:

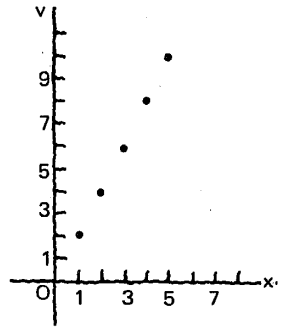


179

$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$

La gráfica cartesiana de R_1 puede tener este aspecto:





180

También podemos definir una relación mediante la especificación del dominio y de una regla que permita determinar la imagen de cada uno de los elementos del dominio.

Ejemplo:

$$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$$

dominio*

regla expresada por medio de una proposición algebraica

*El codominio no está especificado.

181

En

$$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$$

La imagen de x es ⌊___⌋

etcétera

↑

La imagen de -2 es ⌊___⌋
La imagen de -1 es ⌊___⌋
La imagen de 0 es ⌊___⌋
La imagen de 1 es ⌊___⌋
La imagen de 2 es ⌊___⌋

↓

etcétera

x^2

:
4
1
0
1
4
:

182

$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$

$R_2 =$ [ ]

Por extensión o enumeración de los elementos

Por ejemplo:

$\{\ldots(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\ldots\}$

183

$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$

Verifiquemos la existencia de alguna **restricción en el dominio,** es decir, ¿existe uno o más elementos en $\mathbb{Z}$, que no tengan imagen en el **codominio,** que al no estar especificado, **supondremos igual a** $\mathbb{Z}$**?**

Sí / No

No

184

$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$

El rango de $R_2 =$ [ ]

$\{0, 1, 4, 9, 16, 25\ldots\}$

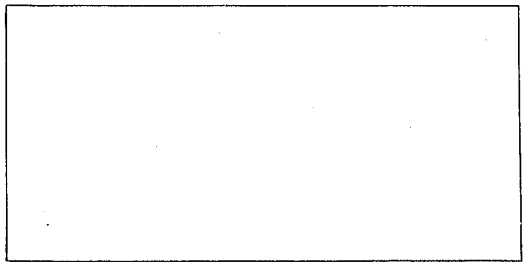
o bien:

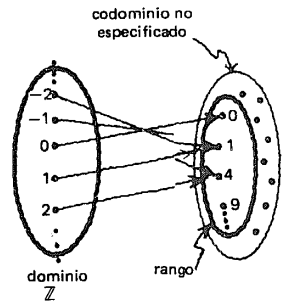
$\{x/x \in \mathbb{N} \wedge x$ es un cuadrado perfecto$\}$

185

$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$

R_2 puede representarse gráficamente mediante una **gráfica sagital** como ésta:

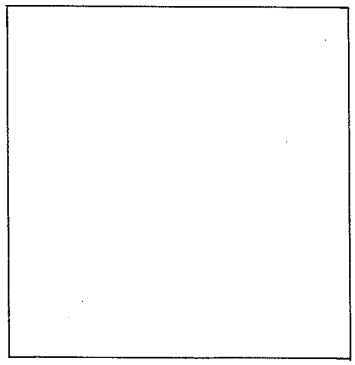




186

$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$

Gráfica cartesiana de R_2:

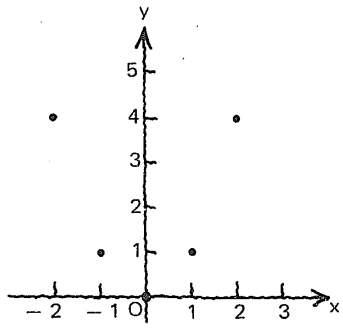


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica parcial de

$R_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$

Imaginemos el resto.



187

Ahora bien,
en una expresión como ésta

$$R_2 = \{ (x, y)/(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \wedge y = x^2 \}$$

el **codominio** queda especificado

188

"Asociar con cada número natural mayor que 0 y menor que 10, que sea cuadrado perfecto, sus dos raíces cuadradas."

Definamos este enunciado
como una relación:

$$R_3 = \{ (x, y)/x \in D \wedge \square \}$$

regla

dominio

$y = \pm\sqrt{x}$

189

$$R_3 = \left\{ (x, y)/x \in D \wedge y = \pm\sqrt{x} \right\}$$

El dominio

$$D = \square$$

Por extensión

$\{1, 4, 9\}$

190

$$R_3 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = \pm\sqrt{x}\}$$

$D = \{1, 4, 9\}$

$R_3 =$ _____

Por extensión

$\{(1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2), (9, -3), (9, 3)\}$

191

$$R_3 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = \pm\sqrt{x}\}$$

$D = \{1, 4, 9\}$

El rango de $R_3 =$ _____

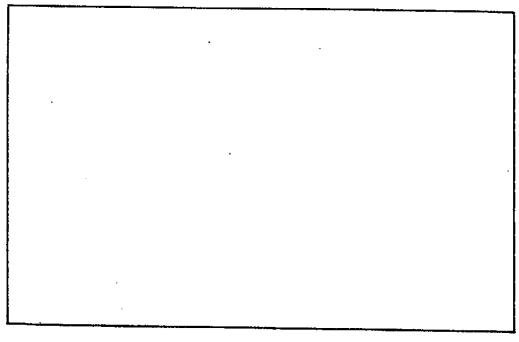
$\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

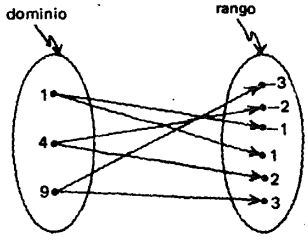
192

$$R_3 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = \pm\sqrt{x}\}$$

$D = \{1, 4, 9\}$

Gráfica sagital:



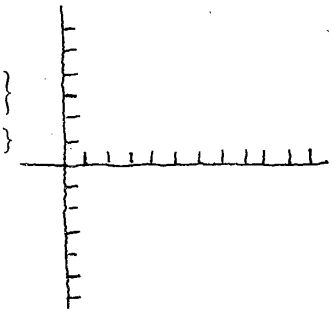


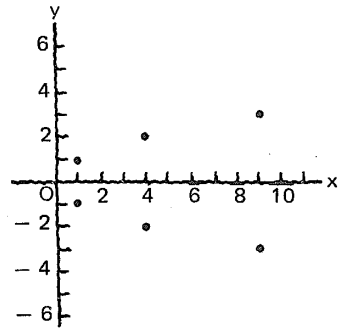
193

$$R_3 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = \pm\sqrt{x}\}$$

$D = \{1, 4, 9\}$

Gráfica cartesiana:





194

$$R_4 = \{(x, y)/(x, y) \in \overbrace{\mathcal{R} \times \mathcal{R}}^{\text{o } \mathcal{R}^{2*}} \text{ y } y = 3x - 2\}$$

Veamos, en primer lugar, si existe alguna **restricción en** $\mathcal{R}$, es decir,
¿existe uno o más elementos de $\mathcal{R}$, que no tengan imagen en el **codominio** $(\mathcal{R})$?

*$\mathcal{R}$ = { x/x es un número real }

195

Completemos la siguiente tabla.

$R_4 = \{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y = 3x - 2\}$

Algunos **primeros componentes** de R_4 tomados de $\mathcal{R}$.

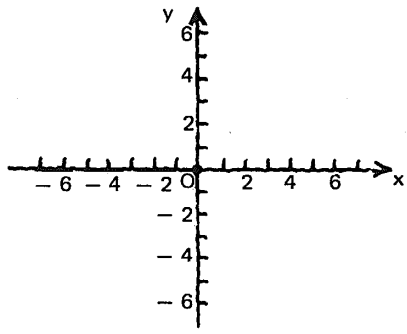
Sus correspondientes **imágenes** (o segundos componentes).

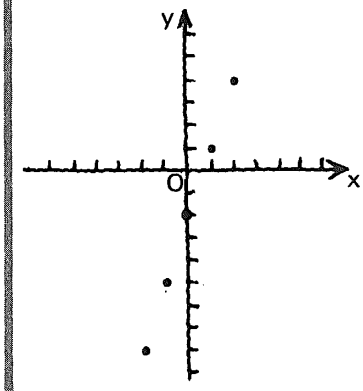
x	
– 100	
– 2	
– 1	
0	
1	
2	
1000	

x	y
– 100	– 302
– 2	– 8
– 1	– 5
0	– 2
1	1
2	4
1000	2998

196

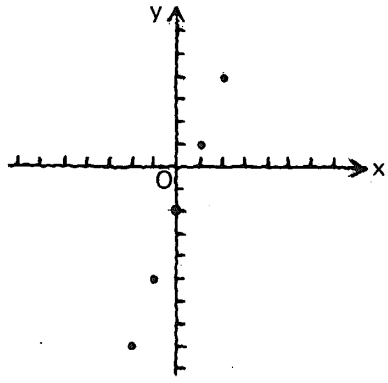
Tracemos los puntos correspondientes a los pares ordenados de la tabla (hasta donde nos sea posible)

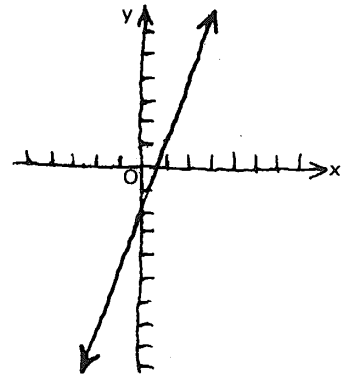




197

Unamos los puntos trazados por medio de una linea continua.





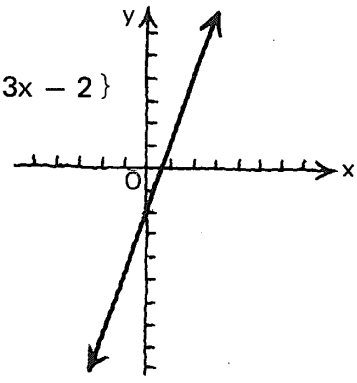
198

Ésta es una representación gráfica parcial de

$R_4 = \{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y = 3x - 2\}$

¿Hay alguna restricción en $\mathcal{R}$? Es decir, ¿existe uno o más elementos de $\mathcal{R}$ que no tengan imagen en $\mathcal{R}$?

Sí/No



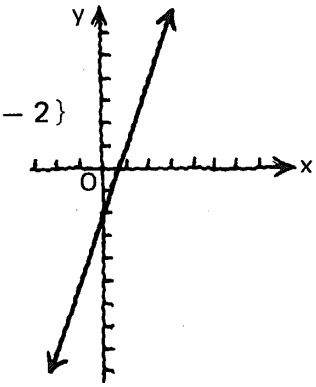
- No

Podemos observar que si $x \in \mathcal{R}$ entonces $3x - 2 \in \mathcal{R}$

199

$R_4 = \{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = 3x - 2\}$

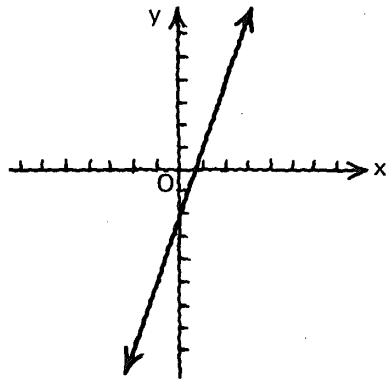
Esta gráfica nos permite "ver" que el **rango** de R_4 es



$\mathbb{R}$

200

También podemos "ver" que el dominio de R_4 es



$\mathbb{R}$

201

Completemos la tabla de R_5:

$R_5 = \left\{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = \frac{1}{x}\right\}$

algunos primeros componentes

imágenes

x	
−8	
−3	
−1	
0	
1	
3	
8	

Atención.

x	y = 1/x
− 8	− 1/8
− 3	− 1/3
− 1	− 1
0	No definida*
1	1
3	1/3
8	1/8

* 0 no tiene imagen en $\mathbb{R}$, ¡ni en ninguna otra parte!

202

$$R_5 = \left\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y = \frac{1}{x}\right\}$$

El dominio de R_5 es, entonces:

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq 0\}$
o
$\mathcal{R} - \{0\}$

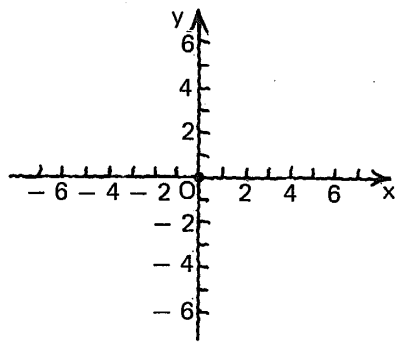
203

Observamos que, para R_5 sí existe restricción en el "dominio" $\mathcal{R}$.

204

Representar en la gráfica, los elementos de R_5 dados en la tabla.

x	y
− 8	− 1/8
− 3	− 1/3
− 1	− 1
0	
1	1
3	1/3
8	1/8

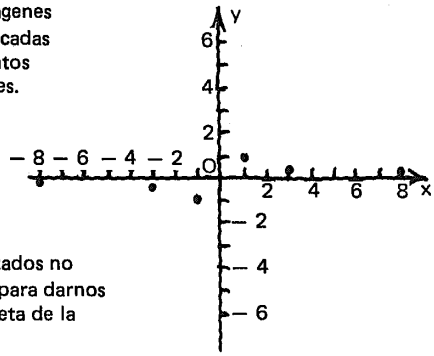


Respuesta en el cuadro siguiente

205

x	y = 1/x
– 8	– 1/8
– 3	– 1/3
– 1	– 1
– 1/3	
– 1/6	
0	
1/6	
1/3	
1	1
3	1/3
8	1/8

Calcular las imágenes adicionales indicadas y trazar los puntos correspondientes.

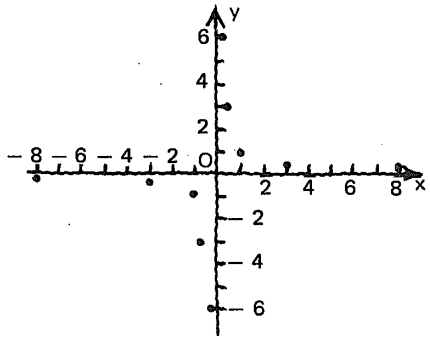


Los puntos trazados no son suficientes para darnos una idea completa de la gráfica de R_5.

Respuesta en el cuadro siguiente

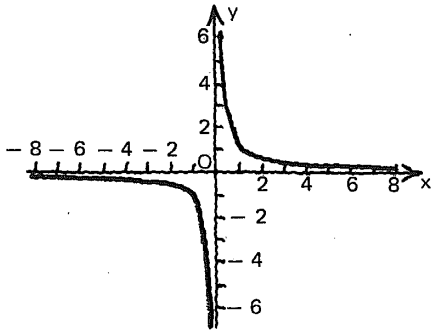
206

x	y = 1/x
– 8	– 1/8
– 3	– 1/3
– 1	– 1
– 1/3	– 3
– 1/6	– 6
0	
1/6	6
1/3	3
1	1
3	1/3
8	1/8



Unir los puntos trazados.

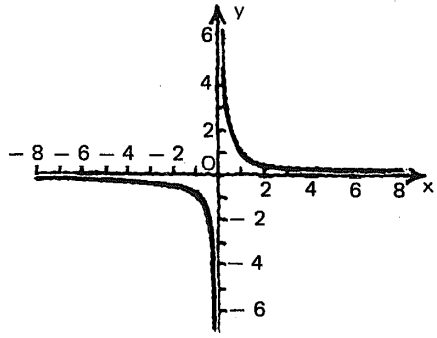
Respuesta en el cuadro siguiente



207

Observemos que:
el dominio de R_5
es:

y su rango es:



$\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0 \}$
o
$\mathbb{R} - \{0\}$

$\{ y/y \in \mathbb{R} \wedge y \neq 0 \}$
o
$\mathbb{R} - \{0\}$

208

Por lo tanto, podemos escribir:

$$R_5 = \left\{ (x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, y \neq 0 \wedge y = \frac{1}{x} \right\}$$

2.7.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

209

Veamos otra forma de simbolizar una

relación de A en B

regla

$R : A \rightarrow B$ / [ ]

que se lee:

"Erre de A en B tal que: _____ "

210

Ejemplos:

$R_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \;/\; y = 2x$
$R_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \;/\; y = x^2$
$R_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \;/\; y = 2x - 3$
$R_4 : \{ 1, 4, 9 \} \rightarrow \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \} \;/\; y = \pm\sqrt{x}$
$R_5 : \mathcal{R} - \{0\} \rightarrow \mathcal{R} - \{0\} \;/\; y = 1/x$

211

Regresemos a los

modelos

estudiados al principio de este módulo.

212

1. Por medio de la expresión

$$F = 1.8C + 32 \qquad C \in \mathbb{R}$$

asignamos a cada **número real C que representa una temperatura en grados centígrados** un **número real F que representa una temperatura en grados Fahrenheit.**

213

Como conjunto definido por comprensión, la relación anterior puede expresarse así:

$$\{(C, F)/C \in \mathbb{R} \wedge F = 1.8C + 32\}$$

o bien:

$$\{(C, F)/(C, F) \in \mathbb{R}^2 \quad F = 1.8C + 32\}$$

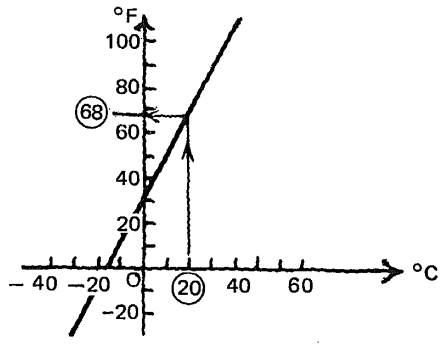
o bien, utilizando nuestras literales acostumbradas

$$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 1.8x + 32\}$$

$$\{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = 1.8x + 32\}$$

214

Esta gráfica cartesiana nos resulta, ahora, más familiar.



215

2. La expresión

$$A = \pi r^2$$
$$r \in \mathbb{R} \wedge r > 0$$

nos permite calcular el área de una región circular de radio **r**

Como conjunto definido por comprensión

$R_2 =$ [ ]

$\{(r, A)/r \in \mathbb{R}, r > 0 \wedge A = \pi r^2\}$

216

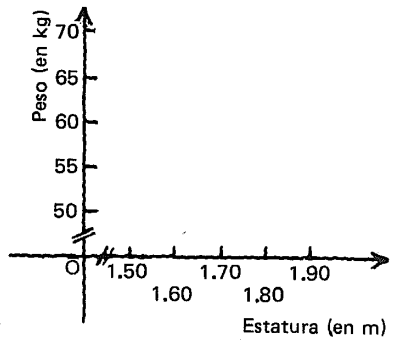
3. En esta tabla **se relaciona:** la **estatura** en metros de una persona de sexo masculino de talla mediana con su **peso** promedio en kilogramos.

Estatura (en m)	Peso (en kg)
1.570	De 53.500 a 58.500
1.595	54.900 a 60.300
1.620	55.900 a 61.700
1.645	57.600 a 63.000
1.670	58.900 a 64.800
1.695	60.800 a 66.700
1.720	62.600 a 68.900
1.745	64.400 a 70.800
1.770	66.200 a 72.600

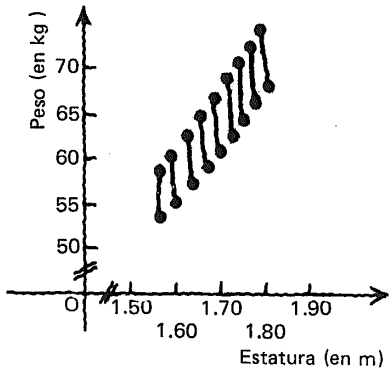
217

Completar la gráfica cartesiana (en forma aproximada), y compararla con la del cuadro siguiente.

Estatura (en m)	Peso (en kg)
1.570	De 53.500 a 58.500
1.595	54.900 a 60.300
1.620	55.900 a 61.700
1.645	57.600 a 63.000
1.670	58.900 a 64.800
1.695	60.800 a 66.700
1.720	62.600 a 68.900
1.745	64.400 a 70.800
1.770	66.200 a 72.600



Estatura (en m)	Peso (en kg)
1.570	De 53.500 a 58.500
1.595	54.900 a 60.300
1.620	55.900 a 61.700
1.645	57.600 a 63.000
1.670	58.900 a 64.800
1.695	60.800 a 66.700
1.720	62.600 a 68.900
1.745	64.400 a 70.800
1.770	66.200 a 72.600



218

4. La expresión

$$y = 50 + 20x$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leqslant 50$$

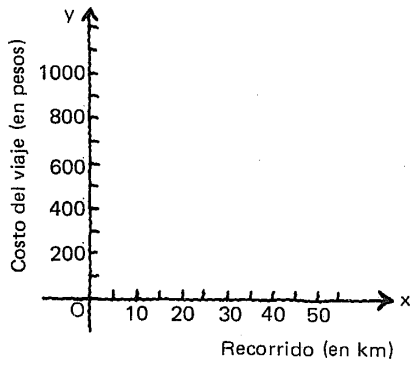
nos permite calcular
el costo **y**
de un viaje en taxi
para un recorrido
de **x** kilómetros,
de acuerdo con cierta tarifa.

219

Completar la tabla
y la gráfica cartesiana

$$y = 50 + 20x$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leqslant 50$$

x	y = 50 + 20x
10	
20	
30	
40	
50	



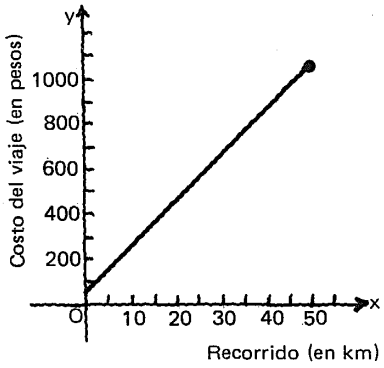
Respuesta
en el
cuadro siguiente

$y = 50 + 20x$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leqslant 50$

x	y = 50 + 20x
10	250
20	450
30	650
40	850
50	1050

↑
imágenes



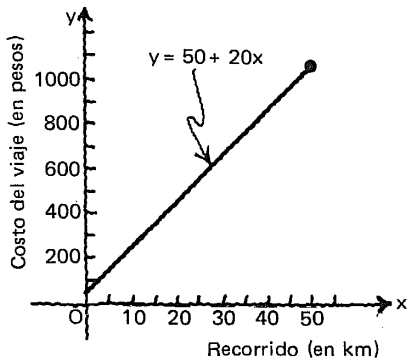
220

El dominio es:

└──────┘

El rango es:

└──────┘



$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leqslant 50\}$

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge 50 < y \leqslant 1050\}$

221

$y = 50 + 20x$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leqslant 50$

R = └──────────────────┘

Conjunto definido por comprensión

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R},\ 0 < x \leqslant 50 \wedge y = 50 + 20x\}$

222

$$y = 50 + 20x$$
$$x \in \mathcal{R} \wedge 0 < x \leqslant 50$$

Expresar en la forma

$$R : \underset{\text{dominio}}{A} \rightarrow \overset{\text{rango}}{B} \;/\; \boxed{}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

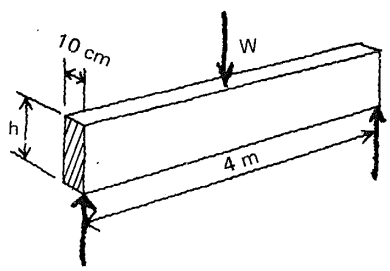
$$R : \{ x/x \in \mathcal{R} \wedge 0 < x \leqslant 50 \} \rightarrow \{ y/y \in \mathcal{R} \wedge 50 < y \leqslant 1050 \} / \; y = 50 + 20x$$

223

5. Por medio de la expresión

$$W = 10.67\, h^2$$
$$h \in \mathcal{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60$$

podemos calcular la carga W en kilogramos que puede soportar una viga como la mostrada para un determinado peralte h.



224

Completar la tabla.

primeros componentes

imágenes

h	W = 10.67 h²
10	
20	
30	
40	
50	
60	

$W = 10.67\ h^2$

$h \in \mathbb{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60$

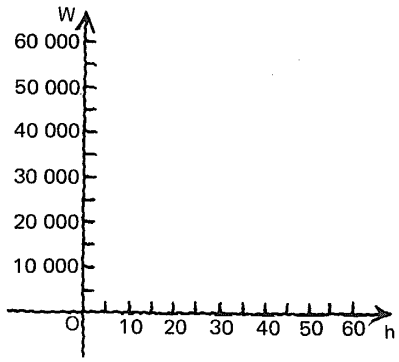
h	W = 10.67 h²
10	1 067
20	4 268
30	9 603
40	17 072
50	26 675
60	38 412

225

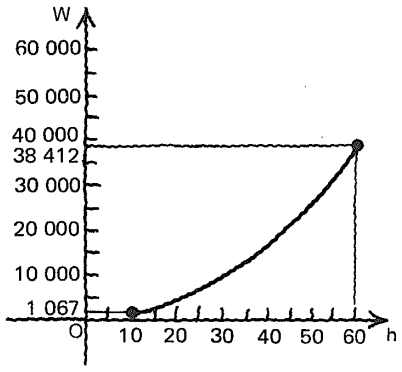
Completar la gráfica de

$W = 10.67\ h^2$

$h \in \mathbb{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60$



Respuesta en el cuadro siguiente



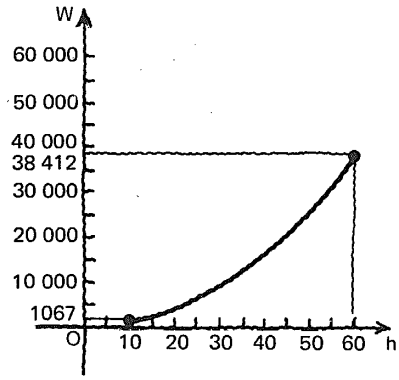
226

El dominio es

_____

El rango es

_____



$\{h/h \in \mathbb{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60\}$

$\{W/W \in \mathbb{R} \wedge 1\,067 \leqslant W \leqslant 38\,412\}$

227

$W = 10.67\ h^2$

$h \in \mathbb{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60$

$S =$ _____

Conjunto definido por comprensión

$\{(h, W)/h \in \mathbb{R}, 10 \leqslant h \leqslant 60 \wedge W = 10.67\ h^2\}$

o bien:

$\{(h, W)/(h, W) \in \mathbb{R}^2, 10 \leqslant h \leqslant 60 \wedge W = 10.67\ h^2\}$

228

$W = 10.67\ h^2$

$h \in \mathbb{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60$

Expresar en la forma

dominio ↓ rango ↓

$R : A \to B$ / ▭

_____

Respuesta en el cuadro siguiente

$S : \{ h/h \in \mathbb{R} \wedge 10 \leqslant h \leqslant 60 \} \rightarrow \{ W/W \in \mathbb{R} \wedge 10.67 \leqslant W \leqslant 38\,142 \} / W = 10.67\, h^2$

229

8. Un comerciante expresó así

$$U = 36.50x - 5500$$
$$x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900$$

capacidad máxima de producción

la **utilidad en pesos** obtenida por la venta de un determinado artículo, de acuerdo con el **número de unidades** vendidas.

230

Completar la tabla.

primeros componentes

imágenes

x	U
0	
100	
500	
900	

$U = 36.50x - 5500$
$x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900$

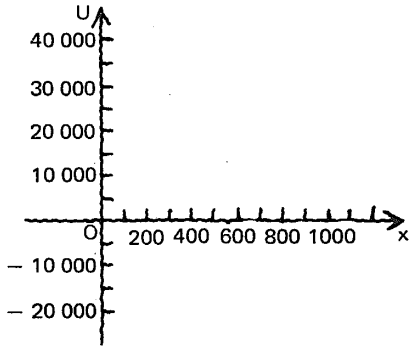
x	U
0	−5 500
100	−1 850
500	12 750
900	27 350

231

Completar la gráfica de

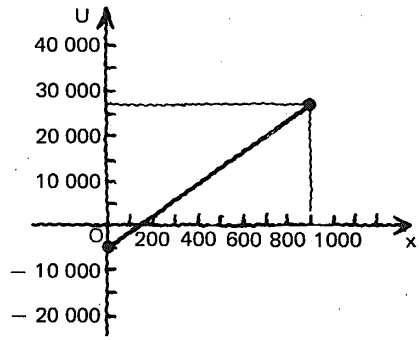
$U = 36.50x - 5500$

$x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900$



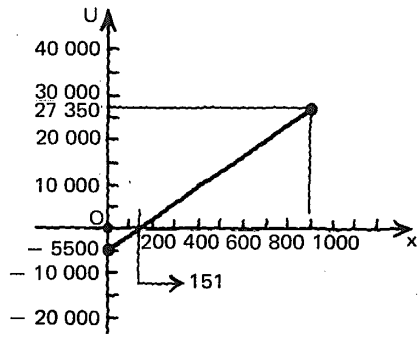
Respuesta
en el
cuadro siguiente

Observemos que la gráfica aparece como una recta de trazo continuo, aunque en forma estricta, debe consistir de una sucesión de puntos aislados dado que el dominio es un subconjunto de $\mathbb{N}$.



232

La porción de la gráfica debajo del eje x, representa **utilidades negativas,** que interpretamos como **pérdidas.**
Para un número de unidades vendidas menor de 151, nuestro comerciante operaría con pérdida.



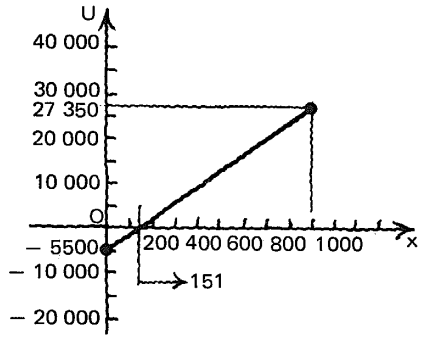
233

El dominio es

[ ]

El rango es

[ ]



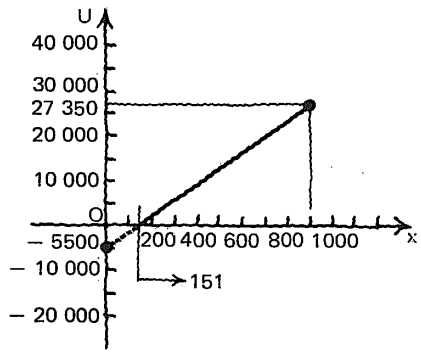
$\{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900\}$

$\{U/U \in \mathbb{R} \wedge -5500 \leqslant U \leqslant 27\,350\}$

234

Si a nuestro comerciante le interesara únicamente la **operación con utilidad**, deberíamos restringir el dominio a

[ ]



$\{x/x \in \mathbb{N} \wedge 151 < x \leqslant 900\}$

235

$U = 36.50x - 5500$

$x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900$

Como conjunto definido por comprensión

$T =$ [ ]

$\{(x, U)/x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 900 \wedge U = 36.50x - 5500\}$

o bien:

$\{(x, U)/(x, U) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},\ x \leqslant 900 \text{ y } U = 36.50x - 5500\}$

236

$$U = 36.50x - 5500$$
$$x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900$$

Expresar en la forma

dominio ↓

$R : A \rightarrow B$ / [ ]

↑ rango

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

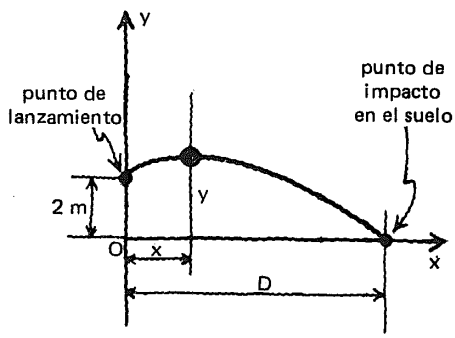
$$T : \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 900 \} \rightarrow \{ U/U \in \mathbb{R} \wedge -5500 \leqslant U \leqslant 27\,350 \} / U = 36.50x - 5500$$

237

9. La expresión

$$y = -0.12x^2 + 1.2x + 2$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant D$$

nos da la posición del proyectil arrojado desde el punto A, en un instante determinado de su recorrido.



238

Atención.

$y = -0.12x^2 + 1.2x + 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant D$

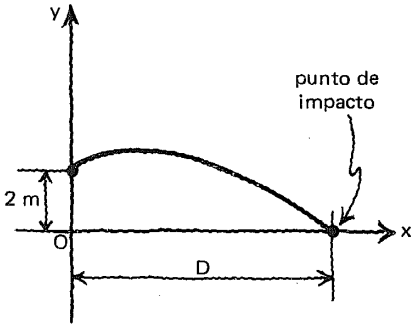
El **punto de impacto** corresponde al par ordenado

$(D, 0)$

cero

en que:

$D =$ [ ]



Respuesta en el cuadro siguiente

En $y = -0.12\,x^2 + 1.2x + 2$ $\quad x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant D$

sustituimos: $x = D$ e $y = 0$

$$0 = -0.12D^2 + 1.2D + 2$$

o bien

$$0.12D^2 - 1.2D - 2 = 0$$

de donde:

$$D = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 + 0.96}}{0.24}$$

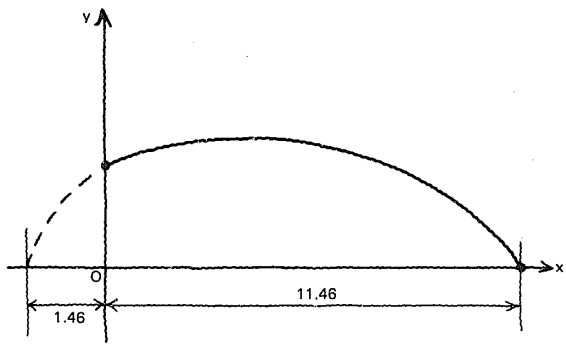
$$D \doteq \frac{1.2 \pm 1.55}{0.24}$$

$D_1 \doteq 11.46$ $\quad D_2 \doteq -1.46$ y como $-1.46 < 0$ $\quad D \doteq 11.46$

239

El dominio es

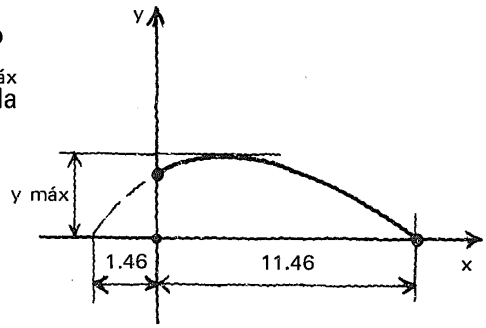
[ ]



$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 11.46\}$

240

Para determinar el **rango** es necesario conocer $y_{máx}$ (altura máxima alcanzada por el proyectil). esto será posible cuando sepamos algunas cosas más acerca de este tipo de relaciones.



241

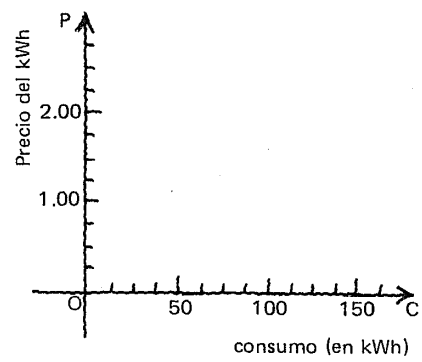
10. Una tarifa ficticia para suministro de energía eléctrica de uso doméstico.

Consumo en kWh	Precio del kWh
(0, 50]	6.40
(50, 100]	10.90
(100, + ∞]	19.70

242

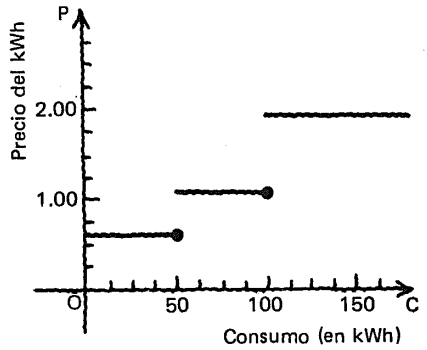
C Consumo en kWh	P Precio kWh
(0, 50]	6.40
(50, 100]	10.90
(100, +∞)	19.70

Completar la gráfica cartesiana.



Respuesta en el cuadro siguiente

C Consumo en kWh	P Precio kWh
(0, 50]	6.40
(50, 100]	10.90
(100,+∞]	19.70



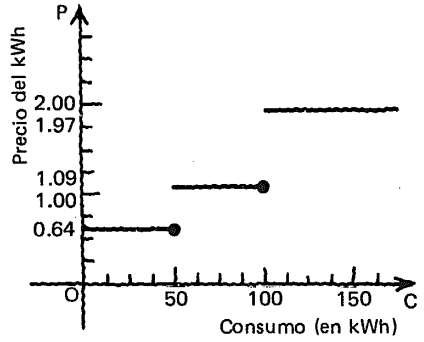
243

El dominio es

└_____┘

El rango es

└_____┘



$\{ c / c \in \mathbb{R} \wedge c > 0 \}$

{6.40, 10.90, 19.70}

244

C	P
(0.50]	6.40
(50, 100]	10.90
(100, + ∞]	19.70

Expresar como conjunto definido por comprensión:

U = └_____┘

$\{ (C, P) / C \in \mathbb{R} \wedge C > 0$
si $0 < C \leq 50, P = 6.40$
si $50 < C \leq 100, P = 10.90$
si $C > 100, P = 19.70 \}$

245

C	P
(0, 50]	6.40
(50, 100]	10.90
(100, + ∞)	19.70

Expresar en la forma:

dominio rango

$R : A \rightarrow B \,/\, \boxed{}$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$U : \{C/C \in \mathcal{R} \wedge C > 0\} \rightarrow \{6.40, 10.90, 19.70\} \Big/ \begin{array}{l} \text{si } 0 < C \leqslant 50 \text{ entonces } P = 6.40 \\ \text{si } 50 < C \leqslant 100 \text{ entonces } P = 10.90 \\ \text{si } C > 100 \text{ entonces } P = 19.70 \end{array}$$

246

En cualquier forma
que se exprese una
relación, su

dominio

debe quedar
perfectamente definido.

2.7.3.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.7.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *simbolizar* una relación, a partir de dos conjuntos y una regla de correspondencia;
- *señalar,* en una relación dada, el dominio, las imágenes, el rango, el codominio y la regla de correspondencia;
- *trazar* la gráfica sagital de una relación dada;
- *trazar* la gráfica cartesiana de una relación dada.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100